

Луи де-Бройль



**ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ
ВОЛНЫ
В ВОЛНОВОДАХ
И ПОЛЫХ
РЕЗОНАТОРАХ**



И*Л

*Государственное издательство
иностранной
литературы*

**PROBLEMES
DE PROPAGATIONS GUIDÉES
DES ONDES ELECTROMAGNETIQUES**

par

LOUIS DE BROGLIE

PARIS

1 9 4 1

Луи де-Бройль

**ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ
В ВОЛНОВОДАХ
И ПОЛЫХ РЕЗОНАТОРАХ**

Перевод с французского
М. С. ГОЛОВИНОЙ

под редакцией
В. Т. ОВЧАРОВА

1 9 4 8

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва

О П Е Ч А Т К И

<i>Стр.</i>	<i>Строка</i>	<i>Напечатано</i>	<i>Следует читать</i>
29	13 сн.	$E'_\varphi \frac{k}{k_z} H'_\rho =$ $= -ika J'_m(\alpha r) \frac{\sin m\varphi}{\cos m\varphi} \cdot P$	$E'_\varphi = -\frac{k}{k_z} H'_\rho =$ $= ik\alpha J'_m(\alpha r) \frac{\sin m\varphi}{\cos m\varphi} \cdot P$
68	4 сн.	$W_m = \frac{kk_z C}{8\alpha^2} C_0 ^2 R^2 J_1^2(\alpha R),$	$W_m = \frac{kk_z C}{8\alpha^2} C_0 ^2 R^2 J_1^2(\alpha R)$
105	3 сн.	43*	33*

О Т Р Е Д А К Т О Р А

Книга известного французского физика-теоретика Л. де-Бройля, перевод которой предлагается вниманию читателя, содержит изложение основных вопросов теории волноводов и полых резонаторов, которые находят широкое применение в такой важной области техники, как радиолокация. Отличаясь простотой и ясностью изложения, книга, несомненно, будет полезна для физиков и инженеров, работающих в области ультракоротких волн.

При редактировании перевода, помимо исправления замеченных опечаток и неточностей, имевшихся в оригинале, редактором сделаны следующие изменения. В разделе 7 главы II автор, излагая решение задачи о возбуждении волновода заданными токами и зарядами, использовал метод разложения решения по собственным функциям соответствующей однородной краевой задачи. При проведении этой плодотворной идеи автором допущены ошибки. Этот раздел написан редактором перевода заново на основании работы Г. В. Кисунько.

В разделе, трактующем вопрос о волнах в диэлектрических стержнях, помещено дополнение, написанное по работе Б. З. Каценеленбаума.

Наконец, в оригинале имелась глава о волнах в рупорах. В этой главе теория некоторых типов рупоров изложена неправильно. Поскольку в этой главе не содержалось интересных результатов, было сочтено целесообразным исключить ее из русского издания. С вопросами, затронутыми в этой главе, читатель может ознакомиться по литературе, список которой приведен в конце книги. Этот список значительно дополнен, главным образом послевоенными работами.

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ УРАВНЕНИЯХ МАКСВЕЛЛА

1. Уравнения Максвелла в прямоугольных декартовых координатах

Как известно, электромагнитное поле характеризуется векторами \mathbf{E} и \mathbf{H} напряженностей электрического и магнитного полей и векторами \mathbf{D} и \mathbf{B} электрической и магнитной индукции, определение которых общеизвестно. С другой стороны, наличие и движение электрических зарядов характеризуются плотностью электричества ρ и плотностью электрического тока \mathbf{i} .

Уравнения Максвелла, связывающие эти величины, мы напишем в следующей форме:

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot } \mathbf{E}, \quad (1.1)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \text{rot } \mathbf{H} - 4\pi \frac{\mathbf{i}}{c}, \quad (1.2)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (1.3)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = 4\pi \rho. \quad (1.4)$$

В этих уравнениях электрические величины \mathbf{E} и \mathbf{D} выражены в электростатических единицах, так же как заряды и токи, тогда как магнитные величины \mathbf{H} и \mathbf{B} выражены в электромагнитных единицах. Константа c является отношением электромагнитной единицы электрического заряда к электростатической единице.

Уравнения (1.1) и (1.3) составляют первую группу уравнений Максвелла (группу однородных уравнений), а уравнения (1.2) и (1.4) — вторую группу (группу со свободным членом). Уравнения (1.1) — (1.4) совместны, так как между ρ и \mathbf{i} имеется соотношение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{i} = 0, \quad (1.5)$$

выражающее закон сохранения электрического заряда.

В дальнейшем мы всегда будем считать, что среда, в которой изучаются электромагнитные явления, обладает диэлектриче-

ской постоянной ε и магнитной проницаемостью μ , причем выполняются соотношения

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (1.6)$$

в которых ε и μ являются постоянными, характеризующими эту среду, предполагаемую однородной и изотропной с электромагнитной точки зрения. В частности, мы нередко будем рассматривать случай пустоты, когда $\varepsilon = \mu = 1$.

Очень часто мы будем допускать, что рассматриваемое пространство не содержит ни зарядов, ни тока, т. е. что $\rho = \mathbf{i} = 0$. Кроме того, мы большей частью будем рассматривать электромагнитные процессы гармонические во времени, т. е. такие, в которых поля изменяются как $\sin kct$ (или в комплексном обозначении как e^{ikct}), т. е. с частотой $\nu = \frac{kc}{2\pi}$.

Короче говоря, мы обыкновенно будем пользоваться уравнениями (1.1) — (1.4) в следующем виде:

$$ik\mu\mathbf{H} = -\text{rot } \mathbf{E}, \quad (1.1a)$$

$$ik\varepsilon\mathbf{E} = \text{rot } \mathbf{H}, \quad (1.2a)$$

$$\text{div } \mathbf{H} = 0, \quad (1.3a)$$

$$\text{div } \mathbf{E} = 0. \quad (1.4a)$$

Как легко проверить, уравнения Максвелла (в случае $\mathbf{i} = \rho = 0$) имеют следствием уравнения

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad \Delta \mathbf{H} = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \quad \left(V = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \right), \quad (1.7)$$

где Δ означает оператор Лапласа: $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Уравнения (1.7) выражают, что электромагнитные поля распространяются в среде, характеризуемой постоянными ε и μ , со скоростью V и, в частности, со скоростью c в пустоте. На этом, как известно, основана электромагнитная теория света.

Для гармонических во времени процессов уравнения (1.7) принимают вид

$$\Delta \mathbf{E} + k^2 \varepsilon \mu \mathbf{E} = 0, \quad \Delta \mathbf{H} + k^2 \varepsilon \mu \mathbf{H} = 0; \quad (1.8)$$

в этом случае легко находятся частные решения уравнений (1.1a) — (1.4a) и вытекающих из них уравнений (1.8) — «плоские

монохроматические волны», определяемые формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 \frac{\sin}{\cos} \left[2\pi\nu \left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{V} \right) + \varphi \right], \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}_0 \frac{\sin}{\cos} \left[2\pi\nu \left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{V} \right) + \varphi \right], \end{aligned} \quad (1.9)$$

где ν — частота (равная $kc/2\pi$), а α, β, γ — направляющие косинусы нормали к плоскости волны, которые могут рассматриваться, как составляющие единичного вектора \mathbf{n} , определяющего направление распространения волны. Амплитуды векторов \mathbf{E}_0 и \mathbf{H}_0 связаны соотношениями

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_0) = 0, (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_0) = 0, \sqrt{\mu} \mathbf{H}_0 = -[\mathbf{n} \times \sqrt{\varepsilon} \mathbf{E}_0]. \quad (1.10)$$

Таким образом, поля \mathbf{E} и \mathbf{H} — поперечные, т. е. оба вектора перпендикулярны к направлению распространения, кроме того, они перпендикулярны друг к другу и в пустоте равны между собой по величине при выражении их с помощью выбранной системы единиц.

Конечно, плоские монохроматические волны являются частным решением и имеется бесконечное число решений других типов. Тем не менее, из теорем Фурье следует, что все несингулярные решения уравнений (1.1а) — (1.4а) могут быть представлены как «суперпозиция» конечного или бесконечного числа плоских монохроматических волн.

Сделаем теперь одно очень важное замечание, которым мы в дальнейшем часто будем пользоваться. Вернемся к уравнениям (1.1а) — (1.4а) и положим, что

$$\mathbf{E}' = \sqrt{\varepsilon} \mathbf{E}, \mathbf{H}' = \sqrt{\mu} \mathbf{H}, k' = k \sqrt{\varepsilon\mu}. \quad (1.11)$$

Тогда мы сможем написать уравнения (1.1а) — (1.4а) в форме

$$ik' \mathbf{H}' = -\text{rot } \mathbf{E}', \quad (1.16)$$

$$ik' \mathbf{E}' = \text{rot } \mathbf{H}', \quad (1.26)$$

$$\text{div } \mathbf{H}' = 0, \quad (1.36)$$

$$\text{div } \mathbf{E}' = 0. \quad (1.46)$$

Эти уравнения той же формы, которую имели бы в пустоте уравнения Максвелла для гармонического электромагнитного поля с частотой $k'c/2\pi$. Отсюда следует вывод, которым мы часто будем пользоваться:

Если для некоторого объема в пустоте найдено гармоническое решение уравнений Максвелла, соответствующее некоторому значению k , то решение, действительное для того же объема заполненного веществом с диэлектрической постоянной ϵ и магнитной проницаемостью μ получится простой заменой ¹⁾ в первом решении k через $k\sqrt{\epsilon\mu}$, \mathbf{E} через $\sqrt{\epsilon}\mathbf{E}$ и \mathbf{H} через $\sqrt{\mu}\mathbf{H}$.

Благодаря этому результату мы сможем после решения задачи о собственных колебаниях или задачи о распространении волн в пустых волноводах найти автоматически и без новых вычислений решения, действительные для тех же объемов, заполненных веществом, для которого ϵ и μ отличны от 1.

Заканчивая этот раздел, напомним определение плотности электромагнитной энергии и вектора Пойнтинга.

В пространстве, где есть электромагнитное поле, каждый элемент $\rho d\tau$ электрического заряда подвержен действию электрической силы, равной $\rho E d\tau$, и электромагнитной силы, пропорциональной векторному произведению скорости смещения электрического заряда на магнитное поле в данной точке. Так как эта последняя сила перпендикулярна к скорости, то она не совершает работы, и работа, произведенная электромагнитным полем над заряженным телом в течение времени dt , равна

$$dL = dt \int (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}) \rho d\tau = dt \int (\mathbf{E} \cdot \mathbf{i}) d\tau. \quad (1.12)$$

Предполагая, что электромагнитное поле в бесконечности равно нулю, заменяя \mathbf{i} выражением, полученным из (1.2), и принимая во внимание (1.1), найдем:

$$\begin{aligned} dL &= \frac{dt}{4\pi} \int \left[\mathbf{E} \cdot \left(c \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \right] d\tau = \\ &= -\frac{dt}{4\pi} \int \left[\left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) - c (\mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E}) \right] d\tau = \\ &= -\frac{dt}{4\pi} \int \left[\left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) + \left(\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \right] d\tau. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Считая выполняющимися соотношения (1.6) между полем и индукцией, получим

$$\frac{dL}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) + (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B})}{8\pi} d\tau = -\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\epsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi} d\tau. \quad (1.14)$$

¹⁾ Однако эта замена не должна быть произведена в e^{ikct} .

Величину

$$W = \frac{\epsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi} = \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) + (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B})}{8\pi} \quad (1.15)$$

можно рассматривать, как плотность электромагнитной энергии поля.

Если же рассматривать конечную область пространства объема V , ограниченную замкнутой поверхностью S , на которой электромагнитное поле не обращается в нуль, то найдем

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) + (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B})}{8\pi} d\tau = \frac{\partial L}{\partial t} + \int \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]_n d\sigma, \quad (1.16)$$

где $[\mathbf{E} \times \mathbf{H}]_n$ обозначает составляющую произведения \mathbf{E} на \mathbf{H} , нормальную к S . Тогда мы увидим, что вектор

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] \quad (1.17)$$

надо рассматривать как поток электромагнитной энергии сквозь единицу поверхности: это и будет вектор Пойнтинга.

2. Комплексное изображение электромагнитных величин

В оптике и учении об электричестве для облегчения расчетов очень часто бывает удобно заменять действительные величины комплексными величинами, в которых действительная часть описывает анализируемое явление.

Рассмотрим, например, электромагнитную плоскую монохроматическую волну, и пусть E_x будет одной из составляющих ее электромагнитного поля. Выше мы видели, что можно положить

$$E_x = |E_x^0| \cos \left[2\pi\nu \left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{c} \right) + \varphi \right] \quad (1.18)$$

или, принимая ось z направленной вдоль распространения волны,

$$E_x = |E_x^0| \cos [k(ct - z) + \varphi], \quad (1.19)$$

где $|E_x^0|$ — действительная постоянная, так же как и φ . Искусство вышеуказанного расчета состоит в замене действительной величины (1.19) на комплексную величину

$$E_x = E_x^0 e^{ik(ct-z)} \quad \text{с} \quad E_x^0 = |E_x^0| e^{i\varphi}, \quad (1.20)$$

где E_x^0 — комплексная амплитуда, содержащая одновременно действительную амплитуду $|E_x^0|$ и постоянную фазы φ . Функция $k(ct - z)$ определяет распространение волны в положительном

направлении оси z . Если в (1.20) заменить z на $-z$, то мы получим комплексное выражение волны той же частоты и той же комплексной амплитуды, но распространяющейся в отрицательном направлении оси z . При суперпозиции двух таких волн, распространяющихся в противоположных направлениях, мы получим стоячие волны, для которых E_x будет пропорциональным $\frac{\sin}{\cos} kz e^{ikt}$.

Пока употребляются только линейные уравнения и линейные операции, комплексное выражение электромагнитных полей не может привести к ошибке и очень удобно. Но в нелинейных выражениях, например, в выражениях (1.15) и (1.17) для W и S употребление комплексного написания не приведет к тем же результатам, какие получаются при действительных выражениях. Поэтому при анализе нелинейных величин всегда необходимо возвращаться к действительному выражению. Тем не менее, когда речь идет об электромагнитных волнах высокой частоты (как в данном случае), употребление комплексных выражений поля очень удобно для быстрого расчета средних значений квадратичных величин, подобных (1.15) и (1.17).

Пусть имеется электромагнитное гармоническое поле. При действительном написании мы можем выразить его в форме ¹⁾

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= |\mathbf{E}_0(x, y, z)| \cos(kct + \varphi), \\ \mathbf{H} &= |\mathbf{H}_0(x, y, z)| \cos(kct + \varphi), \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

где \mathbf{E}_0 и \mathbf{H}_0 — действительные векторные функции x, y, z . Если вычислить W и S , подставляя (1.21) в формулы (1.15) и (1.17), то мы найдем

$$\left. \begin{aligned} W &= \frac{\epsilon |\mathbf{E}_0|^2 \cos^2(kct + \varphi) + \mu |\mathbf{H}_0|^2 \cos^2(kct + \varphi)}{8\pi} \\ S &= \frac{c}{4\pi} [|\mathbf{E}_0| \times |\mathbf{H}_0|] \cos^2(kct + \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

¹⁾ φ может быть действительной постоянной или действительной функцией x, y, z .

²⁾ Выражение (1.21) не представляет поле в самом общем случае. Здесь оно может быть использовано, поскольку речь идет об объяснении метода вычисления средних квадратичных величин. (Прим. ред.)

Попытаемся теперь использовать комплексное выражение поля, заменяя (1.21) через

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0(x, y, z) e^{ikct}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0(x, y, z) e^{ikct}, \\ (\mathbf{E}_0 &= |\mathbf{E}_0| e^{i\varphi}, \quad \mathbf{H}_0 = |\mathbf{H}_0| e^{i\varphi}). \end{aligned} \right\} \quad (1.23)$$

Заменим формулы (1.15) и (1.17) через

$$W = \frac{1}{16\pi} [\varepsilon |E|^2 + \mu |H|^2], \quad \mathbf{S} = \frac{c}{16\pi} \{[\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}] + [\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*]\}, \quad (1.24)$$

где звездочка обозначает комплексно сопряженную величину. Формулы (1.24) мы принимаем по следующей причине: для электромагнитных волн высокой частоты реально наблюдаемы только средние значения во времени величин W и \mathbf{S} . А если рассчитать средние значения по (1.22), то найдем

$$\bar{W} = \frac{1}{16\pi} [\varepsilon |E_0|^2 + \mu |H_0|^2], \quad \bar{\mathbf{S}} = \frac{c}{8\pi} [|\mathbf{E}_0| \times |\mathbf{H}_0|]. \quad (1.25)$$

Эти значения точно совпадают с теми, которые мы получаем, подставляя (1.23) в (1.24).

Итак, мы видим, что, употребляя комплексные выражения поля, получим из формул (1.24) непосредственно средние значения величин W и \mathbf{S} , единственно нас интересующие. По этой причине формулы (1.24) охотно применяются в настоящее время некоторыми авторами.

Здесь интересно отметить, что в новейших квантовых теориях электромагнитного поля комплексные выражения поля не являются только математическим приемом, а имеют и глубокое физическое значение. Формулы типа (1.24) играют существенную роль в этих теориях.

3. Уравнения Максвелла в ортогональных криволинейных координатах

В дальнейшем нам придется постоянно употреблять криволинейные координаты, но во всех рассматриваемых случаях это будут всегда ортогональные криволинейные координаты. Поэтому нам необходимо знать, как пишутся уравнения Максвелла в таких координатах.

В ортогональных криволинейных координатах можно записать квадрат элемента длины в форме

$$ds^2 = e_1^2 dx_1^2 + e_2^2 dx_2^2 + e_3^2 dx_3^2, \quad (1.26)$$

где x_1, x_2, x_3 — три криволинейные координаты, а e_1, e_2, e_3 — три функции от x_1, x_2, x_3 .

Рассматривая элемент поверхности, принадлежащий одной из координатных поверхностей, и применяя к нему теорему Стокса, легко показать, что векторное соотношение

$$\mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{B} \quad (1.27)$$

может быть записано в виде следующих трех соотношений, связывающих составляющие этих векторов вдоль осей выбранной криволинейной системы координат:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{e_2 e_3} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} e_3 B_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} e_2 B_2 \right), \\ A_2 &= \frac{1}{e_3 e_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_3} e_1 B_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} e_3 B_3 \right), \\ A_3 &= \frac{1}{e_1 e_2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} e_2 B_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} e_1 B_1 \right). \end{aligned} \right\} \quad (1.28)$$

С другой стороны, применяя теорему Грина к бесконечно малому параллелепипеду, построенному на трех элементах dx_1, dx_2, dx_3 , убедимся, что

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{e_1 e_2 e_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} e_2 e_3 A_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} e_3 e_1 A_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} e_1 e_2 A_3 \right]. \quad (1.29)$$

Уравнения Максвелла в ортогональных криволинейных координатах, таким образом, имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\mu}{c} e_2 e_3 \frac{\partial H_1}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x_2} e_3 E_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} e_2 E_2, \\ \frac{\epsilon}{c} e_2 e_3 \frac{\partial E_1}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x_2} e_3 H_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} e_2 H_2, \\ -\frac{\mu}{c} e_3 e_1 \frac{\partial H_2}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x_3} e_1 E_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} e_3 E_3, \\ \frac{\epsilon}{c} e_3 e_1 \frac{\partial E_2}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x_3} e_1 H_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} e_3 H_3, \\ -\frac{\mu}{c} e_1 e_2 \frac{\partial H_3}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x_1} e_2 E_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} e_1 E_1, \\ \frac{\epsilon}{c} e_1 e_2 \frac{\partial E_3}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x_1} e_2 H_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} e_1 H_1, \\ \frac{\partial}{\partial x_1} e_2 e_3 H_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} e_3 e_1 H_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} e_1 e_2 H_3 &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x_1} e_2 e_3 E_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} e_3 e_1 E_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} e_1 e_2 E_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.30)$$

Будем применять эти уравнения к полям, гармоническим во времени, что означает замену $\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}$ на ik .

4. Потенциалы и векторы Герца

Как известно, электромагнитные поля можно описывать с помощью двух потенциалов. Из них один — вектор-потенциал \mathbf{A} , другой — скалярный потенциал V . Векторы полей связаны с этими потенциалами следующими соотношениями (полагая $\varepsilon = \mu = 1$).

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\text{grad } V - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (1.31)$$

Группа однородных уравнений Максвелла автоматически удовлетворяется этими соотношениями. Что же касается группы уравнений со свободным членом, то, подставляя в них соотношения (1.31), получим новые уравнения, дающие возможность вычислить \mathbf{A} и V по заданным распределениям в пространстве тока \mathbf{i} и заряда ρ . Эти новые уравнения имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \Delta V &= 4\pi\rho + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial t} \right), \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{A} &= 4\pi\rho \frac{\mathbf{v}}{c} - \text{grad} \left(\text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial t} \right). \end{aligned} \right\} \quad (1.32)$$

Если допустить, что физический смысл имеют только поля, а потенциалы являются лишь промежуточными величинами, облегчающими расчет, то потенциалы обладают большой неопределенностью.

В самом деле, если предположить, что известны поля \mathbf{E} и \mathbf{H} , получаемые по формуле (31) при потенциалах \mathbf{A} и V , то те же самые поля получаются из формул (1.31), при потенциалах

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad } F, \quad V' = V - \frac{1}{c} \frac{\partial F}{\partial t}, \quad (1.33)$$

где F — произвольная функция x, y, z, t . Эта неопределенность потенциалов дает возможность наложить на них дополнительное условие. По Лоренцу, выбирают условие

$$\frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial t} + \text{div } \mathbf{A} = 0, \quad (1.34)$$

которое придает уравнениям (1.32) упрощенную форму

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \Delta V = 4\pi\rho, \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{A} = 4\pi \frac{\rho \mathbf{v}}{c}. \quad (1.35)$$

Мы видим, что при удовлетворении условий Лоренца (1.34) потенциалы распространяются в пустоте ($\rho = \mathbf{i} = 0$) со скоростью c . Впрочем, условие Лоренца не определяет полностью потенциалов, остающихся в довольно широкой степени произвольными.

Когда в рассматриваемой области нет ни тока, ни заряда, свободный член во второй группе уравнений Максвелла исчезает, вследствие чего исчезает асимметрия между обеими группами, и тогда можно употреблять вместо потенциалов антипотенциалы, к определению которых мы сейчас перейдем.

Допустим снова случай пустоты ($\varepsilon = \mu = 1$). Удовлетворим второй группе уравнений Максвелла, являющейся теперь группой однородных уравнений, вводя антипотенциал-вектор \mathbf{A}' и антипотенциал-скаляр V' , такие, что

$$\mathbf{E} = \text{rot } \mathbf{A}', \quad \mathbf{H} = \text{grad } V' + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t}. \quad (1.36)$$

Изменение знака в определении \mathbf{H} происходит от различия в знаках между членами с $\frac{\partial}{\partial t}$ в обеих группах уравнений Максвелла. Если принять между антипотенциалами соотношение Лоренца

$$\frac{1}{c} \frac{\partial V'}{\partial t} + \text{div } \mathbf{A}' = 0, \quad (1.37)$$

то, подставляя (1.36) в первую группу уравнений Максвелла, увидим, что

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V'}{\partial t^2} - \Delta V' = 0, \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}'}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{A}' = 0. \quad (1.38)$$

Другими словами, антипотенциалы распространяются со скоростью c .

Теперь дадим определение векторам Герца. Рассмотрим потенциалы \mathbf{A} и V , удовлетворяющие уравнениям (1.34) и (1.35), и определим электрический вектор Герца $\mathbf{\Pi}$ формулами

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial t}, \quad V = -\text{div } \mathbf{\Pi}, \quad (1.39)$$

которые удовлетворяют соотношению (1.34). Ясно, что в пустоте

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = \Delta \Pi, \quad (1.40)$$

так что Π распространяется со скоростью c . Формулы (1.31) дают нам

$$\mathbf{H} = \text{rot} \frac{1}{c} \frac{\partial \Pi}{\partial t}, \quad \mathbf{E} = \text{grad div} \Pi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2}, \quad (1.41)$$

соотношения, выражающие поля через вектор Π . Известно, что употребление вектора Π очень удобно при расчете излучения прямолинейной антенны и вообще для изучения электромагнитных полей, описываемых в системе координат, в которой одна из координат прямолинейна. В дальнейшем мы встретим примеры применения вектора Герца.

Так же как потенциалам соответствует электрический вектор Герца, так антипотенциалам будет соответствовать магнитный вектор Герца Π' , определяемый формулами

$$\mathbf{A}' = \frac{1}{c} \frac{\partial \Pi'}{\partial t}, \quad V' = -\text{div} \Pi', \quad (1.42)$$

которые удовлетворяют соотношению Лоренца (1.37). По (1.38) видно, что Π' распространяется в пустоте со скоростью c , т. е. что

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Pi'}{\partial t^2} - \Delta \Pi' = 0. \quad (1.43)$$

Наконец, согласно (1.36) поля будут определяться через вектор Π' формулами

$$\mathbf{E}' = \text{rot} \frac{1}{c} \frac{\partial \Pi'}{\partial t}, \quad \mathbf{H}' = -\text{grad div} \Pi' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Pi'}{\partial t^2}. \quad (1.44)$$

Так как уравнения распространения (1.40) и (1.43) имеют ту же форму, то каждый раз, когда будет найдено решение одного из этих уравнений, это решение в пустоте будет относиться в равной мере как к векторам Π , так и к векторам Π' . Если это решение употреблять как вектор Π , то формулы (1.41) нам дадут электромагнитное поле \mathbf{E} , \mathbf{H} — решение уравнений Максвелла, которое мы будем называть решением электрического

типа. Если же употребить это же решение как вектор Π' , то по (44) получим электромагнитное поле \mathbf{E}' , \mathbf{H}' — решение уравнений Максвелла, которое мы будем называть решением магнитного типа. Введенными наименованиями будем в дальнейшем постоянно пользоваться.

В этом разделе мы определили потенциалы и векторы Герца в пустоте, т. е. для $\varepsilon = \mu = 1$, но по методу, указанному в первом разделе, мы сможем во всех изучаемых случаях получить решения, пригодные для $\varepsilon, \mu \neq 1$, с помощью решений, найденных для пустоты.

5. Функции U Боргниса

В следующих главах мы постоянно будем пользоваться методом вычисления полей, развитым М. Боргнисом [6]. Этот метод применим в случаях, когда ортогональные криволинейные координаты таковы, что $e_1 = 1$ и отношение e_2/e_3 не зависит от переменной x_1 . Это часто встречается в задачах, имеющих практическое значение.

Для изложения метода предположим, что $\varepsilon = \mu = 1$, так как мы всегда сможем привести случай $\varepsilon, \mu \neq 1$ к случаю $\varepsilon = \mu = 1$. Тогда, в предположении, что $e_1 = 1$, уравнения Максвелла запишутся для гармонической волны в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned}
 -ike_2e_3H_1 &= \frac{\partial}{\partial x_2} e_3E_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} e_2E_2, \\
 ike_2e_3E_1 &= \frac{\partial}{\partial x_2} e_3H_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} e_2H_2, \\
 -ike_2H_2 &= \frac{\partial}{\partial x_3} E_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} e_3E_3, \\
 ike_3E_2 &= \frac{\partial}{\partial x_3} H_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} e_3H_3, \\
 -ike_2H_3 &= \frac{\partial}{\partial x_1} e_2E_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} E_1, \\
 ike_3E_3 &= \frac{\partial}{\partial x_1} e_2H_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} H_1, \\
 \frac{\partial}{\partial x_1} e_2e_3H_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} e_3H_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} e_2H_3 &= 0, \\
 \frac{\partial}{\partial x_1} e_2e_3E_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} e_3E_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} e_2E_3 &= 0.
 \end{aligned} \right\} (1.45)$$

Попытаемся найти решение с $H_1 = 0$, которое назовем решением электрического типа, полагая

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= k^2 U + \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}, & E_2 &= \frac{1}{e_2} \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2}, & E_3 &= \frac{1}{e_3} \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_3}, \\ H_1 &= 0, & H_2 &= \frac{ik}{e_3} \frac{\partial U}{\partial x_3}, & H_3 &= -\frac{ik}{e_2} \frac{\partial U}{\partial x_2}. \end{aligned} \right\} (1.46)$$

Этими определениями констатируется, что уравнения Максвелла (1.45) удовлетворяются, если U удовлетворяет уравнению второго порядка:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{1}{e_2 e_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{e_3}{e_2} \frac{\partial U}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{e_2}{e_3} \frac{\partial U}{\partial x_3} \right] + k^2 U = 0. \quad (1.47)$$

Аналогично, отыскивая решение с $E_1 = 0$, примем соотношения

$$\left. \begin{aligned} E'_1 &= 0, & E'_2 &= \frac{ik}{e_3} \frac{\partial U'}{\partial x_3}, & E'_3 &= -\frac{ik}{e_2} \frac{\partial U'}{\partial x_2}, \\ H'_1 &= -k^2 U' - \frac{\partial^2 U'}{\partial x_1^2}, & H'_2 &= -\frac{1}{e_2} \frac{\partial^2 U'}{\partial x_1 \partial x_2}, & H'_3 &= -\frac{1}{e_3} \frac{\partial^2 U'}{\partial x_1 \partial x_3}, \end{aligned} \right\} (1.48)$$

которые получаются из (1.46) обменом ролей электрического и магнитного полей. Заметим, что (1.48) является решением (1.45), если U есть решение уравнения второго порядка (1.47). В этом случае имеем решение магнитного типа.

Короче говоря, находя интеграл уравнения (1.47), с помощью соотношений (1.46), получим решение электрического типа, а с помощью соотношений (1.48) — решение магнитного типа.

Сравнивая уравнения (1.46) и (1.48) с уравнениями (1.41) и (1.44) предыдущего раздела, заметим между ними очевидное сходство, если идентифицировать функцию U с составляющей Π_1 электрического вектора Герца и функцию U' с составляющей Π'_1 магнитного вектора Герца. При этом приходится предположить, что эти два вектора Герца имеют отличную от нуля составляющую только с индексом 1. Однако в ряде случаев надо с осторожностью идентифицировать функции U Борнис с составляющими вектора Герца с индексом 1, у которого две другие составляющие равны нулю. На этом мы

остановимся ниже, разбирая решения в сферических координатах¹⁾.

¹⁾ Следует отметить, что идентифицировать функцию U с Π_1 и U' с Π_1' можно лишь в том случае, если $e_1 = 1$, а произведение $e_2 e_3$ не зависит от координаты x_1 . Действительно, например, составляющие напряженности электрического поля, согласно (1.41), запишутся так ($\Pi_2 = \Pi_3 = 0$):

$$E_1 = k^2 \Pi_1 + \frac{1}{e_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{e_1 e_2 e_3} \frac{\partial}{\partial x_1} (e_2 e_3 \Pi_1);$$

$$E_2 = \frac{1}{e_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{e_1 e_2 e_3} \frac{\partial}{\partial x_1} (e_2 e_3 \Pi_1);$$

$$E_3 = \frac{1}{e_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{1}{e_1 e_2 e_3} \frac{\partial}{\partial x_1} (e_2 e_3 \Pi_1).$$

Эти выражения, как легко видеть, совпадают с (1.46) только в случае выполнения вышеуказанных условий. Не трудно видеть, что условие независимости произведения $e_2 e_3$ от x_1 вместе с условием независимости частного e_2/e_3 от x_1 ведет к независимости e_2 и e_3 от x_1 в отдельности. (*Прим. ред.*)

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДАХ

1. Электрические волноводы

Под термином электрические волноводы (или чаще под неудачным названием — диэлектрические волноводы) мы понимаем прямолинейную трубу постоянного сечения, внутри которой распространяются электромагнитные волны. Чаще всего волноводы ограничены металлической стенкой, проводимость которой будем считать столь большой, чтобы без большой ошибки можно было принять ее равной бесконечности. Вследствие этого допустим, что электрическое поле волны, распространяющейся в волноводе, во всех точках нормально к поверхности стенки, ибо в противном случае электрическое поле вызвало бы в стенке бесконечный ток, что физически невозможно. Таким образом, мы имеем граничное условие для электромагнитного поля. Смысл его мы детально разберем в гл. IV.

Распространение электромагнитного поля в трубах будем изучать, пользуясь методом Борнгиса, изложенным в разделе 5, гл. I. Прямолинейную ось трубы примем за ось z , которая будет играть роль введенной ранее переменной x_1 . Точки на нормальных сечениях трубы будут определяться при помощи двух координат x_2 и x_3 , которые мы выберем так, чтобы они были приспособлены к форме этого нормального сечения. Электромагнитная волна будет распространяться вдоль трубы; как всегда фазу распространяющейся плоской волны определяет множитель $e^{i[kct - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}]}$, где \mathbf{k} — волновой вектор, направленный в сторону распространения и равный по длине $2\pi/\lambda$ (λ — длина волны). Таким образом, в трубе мы будем иметь электромагнитные поля, пропорциональные $e^{i(kct - k_2 z)}$, так как волновой вектор, очевидно, имеет только одну компоненту k_2 . Итак, зависимость функции U Борнгиса от z будет определяться этим множителем, и мы будем всегда иметь:

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = \frac{\partial U}{\partial z} = -ik_2 U. \quad (2.1)$$

Подставляя это выражение в уравнения (1.46), увидим, что для волн электрического типа, распространяющихся в волноводе, внутри которого $\epsilon = \mu = 1$, выполняются соотношения

$$H_1 = -\frac{k}{k_z} E_3, \quad H_3 = \frac{k}{k_z} E_2, \quad H_1 \equiv H_z = 0. \quad (2.2)$$

Эти совершенно общие соотношения показывают, что электрические и магнитные поля, поперечные к направлению распространения, взаимно перпендикулярны.

Также и для волн магнитного типа, распространяющихся в волноводе, где $\epsilon = \mu = 1$, по (1.48) имеем

$$E_2 = \frac{k}{k_z} H_3', \quad E_3' = -\frac{k}{k_z} H_2', \quad E_1' \equiv E_z' = 0, \quad (2.3)$$

что тоже выражает взаимную перпендикулярность полей, поперечных к направлению распространения.

Используя общие результаты гл. I для волновода с ϵ и μ , отличными от единицы, получаем вместо (2.2) и (2.3):

$$H_2 = -\frac{k\epsilon}{k_z} E_3, \quad H_3 = \frac{k\epsilon}{k_z} E_2, \quad H_1 = 0, \quad (2.2a)$$

$$E_2' = \frac{k\mu}{k_z} H_3', \quad E_3' = -\frac{k\mu}{k_z} H_2', \quad E_1' = 0. \quad (2.3a)$$

Введем обозначения

$$\alpha^2 = k^2 - k_z^2; \quad (2.4)$$

тогда уравнение распространения (1.47) дает для U , с учетом (2.1):

$$\frac{1}{\epsilon_2 \epsilon_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\epsilon_3}{\epsilon_2} \frac{\partial U}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\epsilon_2}{\epsilon_3} \frac{\partial U}{\partial x_3} \right] + \alpha^2 U = 0. \quad (2.5)$$

Это общий вид уравнения, для которого нам придется в каждом частном случае искать решения, дающие возможность вычислить поля волны электрического и магнитного типа. Полученные решения должны удовлетворять граничным условиям, налагаемым на электрическое поле на стенках трубы. Эти условия налагают ограничения на возможные значения константы α , допуская только некоторые частные значения α_n , соответствующие различным видам волн, распространяющихся в волноводе. Мы имеем здесь дело с одной из проблем собственных значений, которые встречаются в многочисленных областях физики и которые, как

известно, играют существенную роль в современных квантовых теориях.

Приведем еще интересное замечание Л. Бриллюэна. Уравнение (2.5) показывает, что константа α^2 имеет размерность, обратную поверхности, а так как в нашей задаче единственной поверхностью, определяющей форму волны, является поверхность нормального сечения трубы, то выводим следующий закон подобия.

Если для известного электрического волновода, нормальное сечение которого имеет площадь S , найдено для α собственное значение, равное α_n , то для другого волновода, геометрически подобного первому, нормальное сечение которого S' , мы получим собственное значение α'_n такое, что

$$\alpha_n'^2 S' = \alpha_n^2 S. \quad (2.6)$$

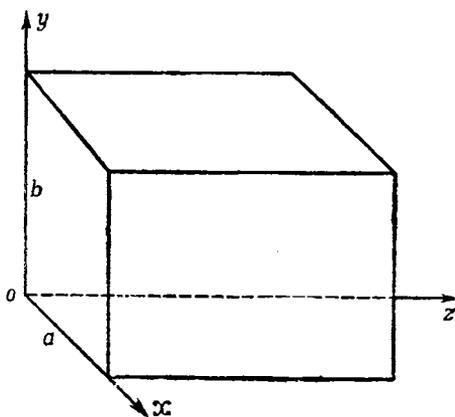
2. Изучение волноводов прямоугольного сечения

Самый простой частный случай, которым мы сейчас займемся это случай волновода прямоугольного сечения. Для решения этой задачи используем метод раздела 1, отметив, что как в этом, так и во всех прочих рассматриваемых в настоящей главе случаях функция U может быть идентифицирована с z -составляющей вектора Герца; последний, в зависимости от выбора, будет электрическим или магнитным.

Рассмотрим волновод, нормальное сечение которого — прямоугольник со сторонами a и b . Отметим точки нормального сечения прямоугольными координатами x и y .

Так как

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad e_1 = e_2 = e_3 = 1, \quad (2.7)$$



Фиг. 1.

то уравнение (2.5) примет вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \alpha^2 U = 0, \quad (2.8)$$

и мы тотчас же находим общее решение, полагая

$$U = \frac{\sin}{\cos} lx \frac{\sin}{\cos} my \cdot e^{i[kct - k_z z]} \quad (2.9)$$

(последний множитель выражает распространение волны); при этом необходимо, чтобы

$$l^2 + m^2 = \alpha^2. \quad (2.10)$$

Из выражения (2.9) для функции U получаются следующие решения для электромагнитного поля:

Электрический тип

$$\left. \begin{aligned} E_z &= \alpha^2 \frac{\sin}{\cos} lx \frac{\sin}{\cos} my \cdot P, & H_z &= 0, \\ E_x &= -ik_z l \frac{\cos}{\sin} lx \frac{\sin}{\cos} my \cdot P, & H_x &= -\frac{k}{k_z} E_y, \\ E_y &= -ik_z m \frac{\sin}{\cos} lx \frac{\cos}{\sin} my \cdot P, & H_y &= \frac{k}{k_z} E_x. \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Магнитный тип

$$\left. \begin{aligned} H_z &= \alpha^2 \frac{\sin}{\cos} lx \frac{\sin}{\cos} my \cdot P, & E_z &= 0, \\ H_x &= -ik_z l \frac{\cos}{\sin} lx \frac{\sin}{\cos} my \cdot P, & E_x &= \frac{k}{k_z} H_y, \\ H_y &= -ik_z m \frac{\sin}{\cos} lx \frac{\cos}{\sin} my \cdot P, & E_y &= -\frac{k}{k_z} H_x, \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

где сокращенно обозначено

$$P = e^{i(kct - k_z z)}. \quad (2.13)$$

Решения (2.11) и (2.12) должны удовлетворять граничным условиям:

$$\left. \begin{aligned} E_z = E_x = 0 & \text{ для } y = 0 \text{ и } y = b, \\ E_z = E_y = 0 & \text{ для } x = 0 \text{ и } x = a. \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

Эти условия обязывают нас выбрать $\sin lx$ в выражении для E_y и $\sin my$ в выражении для E_x . Кроме того, должно быть

$$l = \frac{n_1 \pi}{a}, \quad m = \frac{n_2 \pi}{b} \quad (n_1 \text{ и } n_2 \text{ — целые числа}). \quad (2.15)$$

В конечном итоге выражение полей будет иметь вид:

Тип электрический

$$\left. \begin{aligned} E_z &= \alpha^2 \sin \frac{n_1 \pi}{a} x \sin \frac{n_2 \pi}{b} y \cdot P, \\ E_x &= -ik_z \frac{n_1 \pi}{a} \cos \frac{n_1 \pi}{a} x \sin \frac{n_2 \pi}{b} y \cdot P, \\ E_y &= -ik_z \frac{n_2 \pi}{b} \sin \frac{n_1 \pi}{a} x \cos \frac{n_2 \pi}{b} y \cdot P, \\ H_z &= 0, \\ H_x &= ik \frac{n_2 \pi}{b} \sin \frac{n_1 \pi}{a} x \cos \frac{n_2 \pi}{b} y \cdot P, \\ H_y &= -ik \frac{n_1 \pi}{a} \cos \frac{n_1 \pi}{a} x \sin \frac{n_2 \pi}{b} y \cdot P. \end{aligned} \right\} (2.16)$$

Тип магнитный

$$\left. \begin{aligned} E_z &= 0 \\ E_x &= ik \frac{n_2 \pi}{b} \cos \frac{n_1 \pi}{a} x \sin \frac{n_2 \pi}{b} y \cdot P, \\ E_y &= -ik \frac{n_1 \pi}{a} \sin \frac{n_1 \pi}{a} x \cos \frac{n_2 \pi}{b} y \cdot P, \\ H_z &= \alpha^2 \cos \frac{n_1 \pi}{a} x \cos \frac{n_2 \pi}{b} y \cdot P, \\ H_x &= ik_z \frac{n_1 \pi}{a} \sin \frac{n_1 \pi}{a} x \cos \frac{n_2 \pi}{b} y \cdot P, \\ H_y &= ik_z \frac{n_2 \pi}{b} \cos \frac{n_1 \pi}{a} x \sin \frac{n_2 \pi}{b} y \cdot P. \end{aligned} \right\} (2.17)$$

при условии, что

$$\alpha^2 = k^2 - k_z^2 = \left(\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} \right) \pi^2. \quad (2.18)$$

Конечно, можно помножить решения (2.16) и (2.17) на произвольную постоянную C , значение которой будет зависеть от условий возбуждения.

Мы предположили, что внутри волновода $\epsilon = \mu = 1$, что выполняется достаточно точно, если волновод заполнен воздухом; если же волновод заполнен таким веществом, для которого ϵ и μ отличны от 1, то в формулах (2.16) и (2.17) надо всюду¹⁾ заменить k на $k\sqrt{\epsilon\mu}$, \mathbf{E} на $\sqrt{\epsilon}\mathbf{E}$ и \mathbf{H} на $\sqrt{\mu}\mathbf{H}$. Мы не будем писать получаемые таким образом формулы.

¹⁾ За исключением множителя P .

Каждое собственное значение для α зависит от двух целых чисел n_1 и n_2 . Для каждой пары значений этих целых чисел имеется волна электрического и магнитного типа или, короче говоря, волна (E) и волна (H) для каждого значения k ; обе эти волны соответствуют тому же k_z , т. е. той же длине волны $\lambda = 2\pi/k_z$ и той же скорости распространения фазы

$$V = c \frac{k}{k_z} > c. \quad (2.19)$$

Если, однако, n_1 или n_2 равно нулю, то волна (E) не существует. Другими словами, волны $(n_1, 0)$ и $(n_2, 0)$ существуют только магнитного типа.

Приведенные формулы дают возможность детально изучить различные виды возможных волн в прямоугольной трубе. Л. Бриллюэн показал, что эти волны могут быть представлены надлежащей суперпозицией плоских волн. Он также показал, что скорость распространения электромагнитной энергии вдоль трубы имеет значение

$$v = c \frac{k_z}{k} = \frac{c^2}{V} < c. \quad (2.20)$$

К этому результату мы еще вернемся и дадим ему общее доказательство для всех электрических волноводов.

Формула (2.18) показывает, что по волноводам не могут распространяться волны любых частот. На самом деле надо, чтобы k_z было действительным, ибо иначе распространение сопровождалось бы затуханием и волна бы прогрессивно исчезала. Таким образом, для k имеется минимальное значение, совместимое с распространением без затухания для волн (E) и равное

$$k_{\min} = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} \pi, \quad (2.21)$$

что соответствует частоте

$$\nu_{\min} = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}. \quad (2.22)$$

Эта минимальная частота отвечала бы в пустоте длине волны

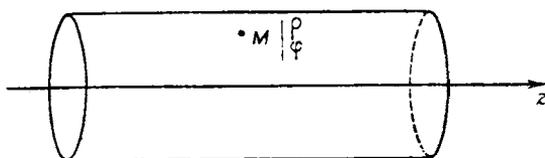
$$\lambda_{\max} = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}}, \quad (2.23)$$

(в случае квадрата: $\lambda_{\max} = a\sqrt{2}$); но в волноводе длина волны, соответствующая ν_{\min} , — бесконечна, как это видно из (2.18) и (2.19).

Лейг Пейдж и Адамс [12] изучали распространение волн в волноводах правильного многоугольного сечения и показали, что волны типа (E) в общем случае не могут распространяться, а волны типа (H) существуют только в исключительных случаях (треугольных и гексагональных сечений). Повидимому, эти формы волноводов с практической точки зрения не имеют большого значения; наиболее употребительные формы — это цилиндрические, к изучению которых мы теперь приступим, используя исследования, проведенные многочисленными авторами.

3. Волноводы круглого сечения

Обратимся к изучению волноводов, имеющих форму цилиндра круглого сечения радиуса R . Направим ось z вдоль оси цилиндра и дополним систему цилиндрических координат координатами ρ и φ в плоскости нормального сечения.



Фиг. 2.

В этих цилиндрических координатах

$$ds^2 = dz^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2, \quad e_1 = e_2 = 1, \quad e_3 = \rho \quad (2.24)$$

и, следовательно, уравнение распространения функции U запишется так:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + k^2 U = 0. \quad (2.25)$$

Найдя решение (2.25), получим поле волн электрического типа:

$$\left. \begin{aligned} E_z &= k^2 U + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}, & E_\rho &= \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \rho}, & E_\varphi &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \varphi}; \\ H_z &= 0, & H_\rho &= \frac{ik}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \varphi}, & H_\varphi &= -ik \frac{\partial U}{\partial \rho} \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

и поле волн магнитного типа:

$$\left. \begin{aligned} E'_z &= 0, & E'_\rho &= \frac{ik}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \varphi}, & E'_\varphi &= -ik \frac{\partial U}{\partial \rho}, \\ H'_z &= -k^2 U - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}, & H'_\rho &= -\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \rho}, & H'_\varphi &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \varphi}. \end{aligned} \right\} (2.27)$$

Мы всегда считаем, что U зависит от z и от t через множитель распространения $e^{i(kct - k_z z)}$. Следуя очень употребительному в математической физике методу, получим полную систему решений (2.25), полагая

$$U(z, \rho, \varphi, t) = F(\rho) \Phi(\varphi) e^{i(kct - k_z z)}. \quad (2.28)$$

Подставляя (2.28) в (2.25), убеждаемся, что (2.25) удовлетворяется только, если некоторая функция от ρ равна некоторой функции от φ . Это возможно только тогда, когда обе эти функции равны одной и той же постоянной. Из этого условия легко получается, что $\Phi = \frac{\sin}{\cos} m\varphi$, где m — постоянная; далее следует:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \rho_1^2} + \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial F}{\partial \rho_1} + \left(1 - \frac{m^2}{\rho_1}\right) F = 0, \quad \text{где } \rho_1 = \sqrt{k^2 - k_z^2} \rho = \alpha \rho. \quad (2.29)$$

Каким же условиям должна удовлетворять теперь функция U ? Она, очевидно, должна быть однозначной и регулярной функцией от ρ, φ, z внутри волновода. Чтобы она была однозначной, надо принять за константу m целое положительное число или нуль. Затем надо выбрать решение (2.29), которое было бы внутри цилиндра всюду регулярным. Уравнение (2.29) есть уравнение Бесселя, все решения которого (за исключением одного) имеют особую точку при $\rho = 0$, т. е. на оси цилиндра. Единственное решение, которое всюду регулярно, даже на оси, — это функция Бесселя порядка m , $J_m(\rho_1) = J_m(\alpha \rho)$. Таким образом, для U находим следующее физически допустимое решение:

$$U = J_m(\alpha \rho) \frac{\sin}{\cos} m\varphi e^{i(kct - k_z z)}, \quad \text{где } \alpha = \sqrt{k^2 - k_z^2}. \quad (2.30)$$

Из решения (2.30) с помощью формул (2.26) и (2.27) выведем

две формы возможных в волноводе волн (с точностью до произвольного постоянного множителя):

Тип электрический

$$\left. \begin{aligned} E_z &= \alpha^2 J_m(\alpha\rho) \frac{\sin}{\cos} m\varphi e^{i(kct - k_z z)}, H_z = 0, \\ E_\rho &= -ik_z \alpha J'_m(\alpha\rho) \frac{\sin}{\cos} m\varphi \cdot P, \\ H_\rho &= -\frac{k}{k_z} E_\varphi = ik \frac{m}{\rho} J_m(\alpha\rho) \frac{\cos}{-\sin} m\varphi \cdot P, \\ E_\varphi &= -ik_z \frac{m}{\rho} J_m(\alpha\rho) \frac{\cos}{-\sin} m\varphi \cdot P, \\ H_\varphi &= \frac{k}{k_z} E_\rho = -ik\alpha J'_m(\alpha\rho) \frac{\sin}{\cos} m\varphi \cdot P \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

и

Тип магнитный

$$\left. \begin{aligned} H'_z &= \alpha^2 J_m(\alpha\rho) \frac{\sin}{\cos} m\varphi \cdot P, E'_z = 0, \\ H'_\rho &= -ik_z \alpha J'_m(\alpha\rho) \frac{\sin}{\cos} m\varphi \cdot P, \\ E'_\rho &= \frac{k}{k_z} H'_\varphi = -ik \frac{m}{\rho} J_m(\alpha\rho) \frac{\cos}{-\sin} m\varphi \cdot P, \\ H'_\varphi &= -ik_z \frac{m}{\rho} J_m(\alpha\rho) \frac{\cos}{-\sin} m\varphi \cdot P, \\ E'_\varphi &= \frac{k}{k_z} H'_\rho = -ik\alpha J'_m(\alpha\rho) \frac{\sin}{\cos} m\varphi \cdot P. \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

В этих формулах P означает множитель фазы, а $J'_m(u)$ —производную от $J_m(u)$ по аргументу u .

Теперь надо ввести граничные условия для электрического поля на стенке волновода. Они в данном случае имеют вид:

$$E_z = E_\varphi = 0, \quad \text{для } \rho = R. \quad (2.33)$$

Эти условия для волн электрического типа (E_m) приводят к требованию, чтобы

$$J_m(\alpha R) = 0, \quad (2.34)$$

а для волн магнитного типа (H_m), чтобы

$$J'_m(\alpha R) = 0. \quad (2.35)$$

Обозначим через $\mu_1^{(m)}, \mu_2^{(m)}, \dots, \mu_i^{(m)}, \dots$ последовательный ряд не равных нулю корней функции $J_m(u)$ и, соответственно,

через $\nu_1^{(m)}, \nu_2^{(m)}, \dots, \nu_i^{(m)}, \dots$ — ряд корней функции $J'_m(u)$. Тогда условие (2.34) для волн (E_m) дает нам допустимые значения для α :

$$\alpha = \frac{\mu_i^{(m)}}{R} = \alpha_{mi}, \quad (2.36)$$

и, соответственно, условие (2.35) для волн (H_m):

$$\alpha = \frac{\nu_i^{(m)}}{R} = \alpha'_{mi}. \quad (2.37)$$

Мы видим, что как в одном, так и в другом случае существует дважды бесконечная серия значений α , каждое из которых характеризуется двумя целыми числами и для которых имеется возможная бегущая волна в волноводе. Следовательно, для данного значения k , т. е. для данной частоты, имеется целый ряд допустимых значений k_z

$$k_z^2 = k^2 - \alpha_{mi}^2 \quad \text{или} \quad k_z^2 = k^2 - \alpha'_{mi}^2, \quad (2.38)$$

в зависимости от того, рассматриваются ли волны (E) или волны (H). Каждому значению k_z соответствует длина волны и скорость распространения фазы в волноводе:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k_z}, \quad V = c \frac{k}{k_z} > c. \quad (2.39)$$

Легко убедиться, что средняя скорость распространения электромагнитной энергии вдоль волновода равна

$$v = c \frac{k_z}{k} = \frac{c^2}{V} < c. \quad (2.40)$$

Из соотношений (2.38) видно, что для всякого типа волны существует минимальное значение k ; при меньших значениях k становится невозможным распространение волны вдоль волновода. Таким образом, волновод является фильтром, пропускающим волны выше некоторой определенной заданной частоты. Для волн (E_m) минимальное значение k равно

$$k_{\min} = \frac{\mu_1^{(0)}}{R} = \frac{2,4}{R}, \quad (2.41)$$

что соответствует частоте и длине волны в пустоте

$$\nu_{\min} = \frac{2,4 c}{2\pi R}, \quad \lambda_{\max} = \frac{2\pi R}{2,4}. \quad (2.42)$$

Но, конечно, в волноводе длина волны, соответствующая ν_{\min} согласно (2.38) и (2.39) бесконечна.

Для волн типа (H_m) значение k_{\min} равно

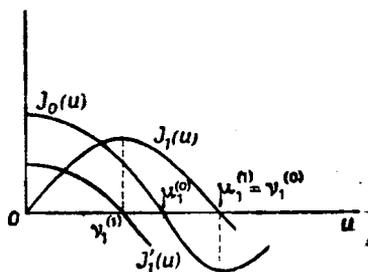
$$k_{\min} = \frac{n}{R}, \quad (2.43)$$

где посредством n обозначен наименьший из корней $\nu_i^{(m)}$. Здесь, в противоположность тому, что имеет место для $\mu_i^{(m)}$, наименьшим $\nu_i^{(m)}$ будет не $\nu_i^{(0)}$. В самом деле, известно, что

$$\frac{dJ_0(u)}{du} = -J_1(u), \quad (2.44)$$

с другой стороны, все $J_m(u)$, обращаются в нуль при $u=0$ за исключением $J_0(0)$, равной единице. Отсюда следует, что кривые, представляющие $J_0(u)$, $J_1(u) = -J'_0(u)$ и $J'_1(u)$, расположены, как указано на фиг. 3.

Отсюда также следует, что $n = \nu_1^{(1)}$. Другими словами, вопреки ожиданию, среди волн типа (H_m) могущих распространяться в волноводе, волной с наименьшей частотой будет волна (H_1) , а не волна (H_0) , тогда как для волн типа (E_m) волной с наименьшей частотой будет волна (E_0) .



Фиг. 3.

Из этого результата очевиден особенный характер волны (H_0) , к исследованию которого мы еще вернемся.

Этот интересный факт, что граничная частота ν_{\min} для (H_1) ниже, чем для (H_0) отметил впервые Л. Бриллюэн. Он сравнил проблему электрического цилиндрического волновода с проблемой звуковых колебаний воздуха в цилиндрической трубе. Если скорость молекул воздуха уподобить магнитному полю, то вибрации в звучащей трубе совершенно подобны полученным ниже волнам магнитного типа, так как уравнения распространения и граничные условия в обоих случаях одинаковы. Но в акустической проблеме нет условий равенства нулю дивергенции в любой точке поля, аналогичных тем, которые существуют в электромагнетизме, и это дает возможность принять в акустике решения:

с $\alpha=0$, т. е. $k=k_z$. Таким образом, получаются, например, совместимые с этими условиями решения для скорости молекул

$$v_z = J_m(0) \frac{\sin}{\cos} m \varphi e^{ik(ct-z)}, \dots, \quad (2.45)$$

где c здесь, конечно, означает скорость звука в воздухе. Но из выражений $J_m(0)$ и $J'_m(0)$ видно, что единственное решение этого типа, отличное от нуля и совместимое с граничными условиями, получается, когда $m=0$, откуда

$$v_x = \text{const} \cdot e^{ik(ct-z)}, \quad v_x = v_y = 0. \quad (2.46)$$

Это и есть решение, обычно рассматриваемое в теории звучащих цилиндрических труб, в своем роде основное решение; существует, однако, бесконечное число других решений, входящих в общий тип (2.32). Но в электромагнитной проблеме требования равенства нулю дивергенций полей в любой точке не позволяют принять $\alpha=0$ и, следовательно, не существует основного решения, аналогичного (2.46)¹⁾. Итак, мы видим, что для волн (H_m) волна (H_0) не является настоящим основным решением вследствие требования равенства нулю дивергенции. Таким образом, можно лучше понять, почему (H_0) не играет той роли, которую можно было ожидать.

Чтобы разобраться в структуре волн (2.31) и (2.32), изучим подробнее волны (E_0) и (H_0). Для волны (E_0) находим:

$$\left. \begin{aligned} E_z &= \alpha^2 J_0(\alpha\rho) \cdot P, & E_\rho &= ik_z \alpha J_1(\alpha\rho) \cdot P, \\ H_\varphi &= ik\alpha J_1(\alpha\rho) \cdot P, & H_z = E_\varphi = H_\rho &= 0. \end{aligned} \right\} (E_0)$$

Электрическое поле в нормальном сечении радиально, а магнитные силовые линии являются окружностями. Для поля (H_0) находим обратное:

$$\left. \begin{aligned} H_z &= \alpha^2 J_0(\alpha\rho) \cdot P, & H_\rho &= ik_z \alpha J_1(\alpha\rho) \cdot P, \\ E_\varphi &= -ik\alpha J_1(\alpha\rho) \cdot P, & H_\varphi = E_z = E_\rho &= 0. \end{aligned} \right\} (H_0)$$

Теперь в нормальном сечении магнитное поле радиально, а электрические силовые линии являются окружностями. Волны (E_m) и (H_m) для $m > 0$ обладают более сложной структурой.

¹⁾ Другое решение, являющееся также основным, здесь невозможно, так как оно обращается в бесконечность при $\rho=0$. См. об этом следующий раздел. (Прим. ред.)

Все формулы этого раздела были получены в предположении, что внутри цилиндрического волновода $\epsilon = \mu = 1$. Если волновод заполнен веществом с диэлектрической постоянной $\epsilon \neq 1$ и магнитной проницаемостью $\mu \neq 1$, то в формулах (2.31) и (2.32) придется заменить k через $k\sqrt{\epsilon\mu}$, \mathbf{E} — через $\sqrt{\epsilon}\mathbf{E}$ и \mathbf{H} — через $\sqrt{\mu}\mathbf{H}$. Мы не будем заниматься изучением получаемых таким образом формул.

Заканчивая раздел, покажем, что волны, способные распространяться в цилиндрическом волноводе, могут быть представлены как суперпозиция обыкновенных монохроматических плоских волн. Для этого достаточно доказать, что выражение

$$J(\alpha\rho) e^{\pm im\varphi} e^{i(kct - kz z)} \quad (2.47)$$

может быть получено такой суперпозицией. Рассмотрим некоторое направление с азимутом φ_0 и углом θ_0 , который оно образует с осью Oz волновода. В точке с координатами $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ и z плоская волна, имеющая указанное направление распространения, будет иметь вид

$$e^{ik[ct - z \cos \theta_0 - x \sin \theta_0 \cos \varphi_0 - y \sin \theta_0 \sin \varphi_0]}$$

или

$$e^{ik[ct - z \cos \theta_0]} e^{-ik \sin \theta_0 [\rho \cos \varphi \cos \varphi_0 + \rho \sin \varphi \sin \varphi_0]}.$$

Рассмотрим теперь все плоские волны этого типа, направления распространения которых образуют круговой конус с осью Oz и углом при вершине θ_0 . При их суперпозиции получим интеграл Фурье

$$\int_0^{2\pi} a(\varphi_0) e^{-ik\rho \sin \theta_0 \cos(\varphi_0 - \varphi)} d\varphi_0 e^{ik(ct - z \cos \theta_0)}.$$

Если предположить, что

$$a(\varphi_0) = e^{\pm im\varphi_0} = e^{\pm im\varphi} e^{\pm im\omega} \quad (\omega = \varphi_0 - \varphi), \quad (2.48)$$

причем m — целое положительное число или нуль, то получим интеграл

$$\int_0^{2\pi} e^{-i[k\rho \sin \theta_0 \cos \omega \mp m\omega]} d\omega e^{\pm im\varphi} e^{ik(ct - z \cos \theta_0)}$$

или

$$\int_0^{2\pi} e^{-i[\alpha r \cos \omega \mp m\omega]} d\omega e^{\pm im\varphi} e^{i[kct - k_z z]},$$

если ввести обозначения:

$$k_z = k \cos \theta_0, \quad \alpha = k \sin \theta_0 = \sqrt{k^2 - k_z^2}. \quad (2.49)$$

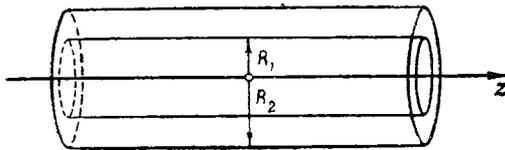
Тогда остается только вспомнить, что в теории функций Бесселя доказывается важная формула

$$(\pm i)^{-m} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ix \cos \omega} e^{\pm im\omega} d\omega = J_m(x), \quad (2.50)$$

чтобы увидеть, что последний интеграл с точностью до постоянного множителя совпадает с выражением (2.47). Отсюда следует, что волны, могущие распространяться в цилиндрических волноводах, допускают представление их в виде суперпозиции плоских монохроматических волн.

4. Коаксиальная линия

Под коаксиальной линией мы понимаем систему, образованную двумя металлическими коаксиальными цилиндрами радиусов R_1 и R_2 , служащими для проведения электромагнитной волны, распространяющейся в кольцеобразном пространстве, заключенном между цилиндрами.



Фиг. 4.

Мы, естественно, воспользуемся цилиндрическими координатами z, ρ, φ . Функция U будет опять решением (2.25). С помощью всякого приемлемого решения (2.25) выведем выражения полей электрического и магнитного типа, пользуясь формулами

(2.26) и (2.27). Однозначные решения (2.25) примут вид

$$U(z, \rho, \varphi, t) = F(\rho) \frac{\sin}{\cos} m\varphi e^{i(kct - k_z z)}, \quad (2.51)$$

причем $F(\rho)$ должно удовлетворять уравнению (2.29). Но именно здесь рассматриваемая проблема отличается от предыдущей. На самом деле, здесь ось z не заключается больше в области распространения волны, так что мы не будем требовать, чтобы $F(\rho)$ была регулярной для $\rho=0$, а лишь для $R_1 \leq \rho \leq R_2$. Кроме того, точка $\rho=0$ является единственным полюсом коэффициентов (2.29), вследствие чего решение (2.29) регулярно для $\rho \neq 0$, и мы можем принять за $F(\rho)$ любое решение (2.29). Мы получим такое решение из линейной комбинации функции Бесселя $J_m(\rho_1)$ и другого решения (2.29), линейно не зависящего от J_m , например функции Неймана $N_m(\rho_1)$. Конечно, функция N_m имеет особенность на оси Oz , однако это здесь не имеет значения. Однозначные и непрерывные решения для U в области распространения мы получим в форме

$$U = [AJ_m(\alpha\rho) + BN_m(\alpha\rho)] \frac{\sin}{\cos} m\varphi e^{i(kct - k_z z)} \quad (\alpha^2 = k^2 - k_z^2), \quad (2.52)$$

где A и B — две произвольные комплексные константы.

Из (2.52) получаются следующие формулы для волн обоих типов:

Тип электрический

$$\left. \begin{aligned} E_z &= \alpha^2 [AJ_m(\alpha\rho) + BN_m(\alpha\rho)] \frac{\sin}{\cos} m\varphi \cdot e^{i(kct - k_z z)}, \quad H_z = 0, \\ E_\rho &= -ik_z \alpha [AJ'_m(\alpha\rho) + BN'_m(\alpha\rho)] \frac{\sin}{\cos} m\varphi \cdot P, \quad H_\rho = -\frac{k}{k_z} E_\rho, \\ E_\varphi &= -ik_z \frac{m}{\rho} [AJ_m(\alpha\rho) + BN_m(\alpha\rho)] \frac{\cos}{-\sin} m\varphi \cdot P, \quad H_\varphi = \frac{k}{k_z} E_\varphi; \end{aligned} \right\} (2.53)$$

Тип магнитный

$$\left. \begin{aligned} H'_z &= \alpha^2 [AJ_m(\alpha\rho) + BN_m(\alpha\rho)] \frac{\sin}{\cos} m\varphi \cdot P, \quad E'_z = 0, \\ H'_\rho &= -ik_z \alpha [AJ'_m(\alpha\rho) + BN'_m(\alpha\rho)] \frac{\sin}{\cos} m\varphi \cdot P, \quad E'_\rho = \frac{k}{k_z} H'_\rho, \\ H'_\varphi &= -ik_z \frac{m}{\rho} [AJ_m(\alpha\rho) + BN_m(\alpha\rho)] \frac{\cos}{-\sin} m\varphi \cdot P, \quad E'_\varphi = -\frac{k}{k_z} H'_\varphi; \end{aligned} \right\} (2.54)$$

где $J'_m(u)$ и $N'_m(u)$ являются производными от $J_m(u)$ и $N_m(u)$ по переменной u .

Теперь нам надо ввести граничные условия на стенках, которые мы себе представим идеально проводящими,

$$E_z = E_\varphi = 0, \text{ для } \rho = R_1 \text{ и } \rho = R_2. \quad (2.55)$$

Для волн (E_m) электрического типа получим

$$AJ_m(\alpha R_1) + BN_m(\alpha R_1) = 0, \quad AJ_m(\alpha R_2) + BN_m(\alpha R_2) = 0. \quad (2.56)$$

Эти два линейных уравнения, определяющие A и B , допускают решение, отличное от нуля, если их детерминант равен нулю, что дает соотношение

$$J_m(\alpha R_1) N_m(\alpha R_2) = J_m(\alpha R_2) N_m(\alpha R_1). \quad (2.57)$$

Это трансцендентное уравнение имеет корни $\alpha_1^{(m)}, \alpha_2^{(m)}, \dots, \alpha_i^{(m)}, \dots$. Если $\alpha = \alpha_i^{(m)}, \dots$, то соотношение

$$\frac{B}{A} = - \frac{J_m(\alpha_i^{(m)} R_1)}{N_m(\alpha_i^{(m)} R_1)} \quad (2.58)$$

дает решение типа (2.53), удовлетворяющее граничным условиям.

Для волн (H_m) граничные условия (2.55) дадут

$$AJ'_m(\alpha R_1) + BN'_m(\alpha R_1) = 0, \quad AJ'_m(\alpha R_2) + BN'_m(\alpha R_2) = 0, \quad (2.59)$$

откуда вытекает условие

$$J'_m(\alpha R_1) N'_m(\alpha R_2) = J'_m(\alpha R_2) N'_m(\alpha R_1) \quad (2.60)$$

для определения допустимых значений $\beta_1^{(m)}, \beta_2^{(m)}, \dots, \beta_i^{(m)}, \dots$ для α . Если $\alpha = \beta_i^{(m)}$, то достаточно принять

$$\frac{B}{A} = - \frac{J'_m(\beta_i^{(m)} R_1)}{N'_m(\beta_i^{(m)} R_1)} \quad (2.61)$$

для получения решения типа (2.54), удовлетворяющего граничным условиям.

Подводя итог, можно сказать, что здесь мы имеем для всякого значения m ($m = 0, 1, 2, \dots$) последовательность собственных значений для α . Следовательно, всякому значению m соответствует значение k (равное самому малому из собственных значений α), являющееся самым малым значением k , при

котором возможно распространение рассмотренных типов волн. Нам хотелось бы из этого заключить, как в предшествующем разделе, что существует граничная частота, ниже которой невозможно никакое распространение вдоль коаксиальной линии. Однако на самом деле получается иначе, так как в коаксиальной линии существует еще способ распространения, не существующий в цилиндрическом волноводе и точно соответствующий основной вибрации, о которой шла речь в конце прошлого раздела.

Мы получаем основное решение интересующего нас вопроса, внося (2.51) в уравнение (2.25) и предполагая $\alpha = 0$, что дает для U уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \rho} - \frac{m^2}{\rho^2} U = 0, \quad (2.62)$$

общим решением которого будет

$$U = [A\rho^m + B\rho^{-m}] \frac{\sin}{\cos} m\varphi e^{ik(ct-z)}. \quad (2.63)$$

Из решения (2.63) согласно (2.26) или (2.27) получаем для волн обоих типов:

$$\begin{aligned} E_z &= 0, \\ E_\rho &= [C\rho^{m-1} + D\rho^{-m-1}] \frac{\sin}{\cos} m\varphi \cdot P, \\ E_\varphi &= [C\rho^{m-1} - D\rho^{-m-1}] \frac{\cos}{\sin} m\varphi \cdot P, \\ H_z &= 0, H_\rho = -\frac{k_z}{k} E_\varphi = -E_\varphi, H_\varphi = \frac{k_z}{k} E_\rho = E_\rho. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Граничные условия (2.55) обязывают принять $m=0$ и $D=C$. Таким образом, получается единственное приемлемое решение:

$$E_z = E_\varphi = 0, E_\rho = \frac{C}{\rho} e^{ik(ct-z)}, H_z = H_\rho = 0, H_\varphi = E_\rho. \quad (2.65)$$

Впрочем, можно без затруднений непосредственным расчетом проверить существование этого решения уравнений Максвелла. Наличие множителя ρ в знаменателе у E_ρ тотчас объясняет, почему неприемлемо решение (2.65) в цилиндрическом волноводе, ибо оно имеет особую точку на оси z .

В данном случае эта особенность не исключает решения. Все частоты могут распространяться в коаксиальной линии

в виде волны типа (2.65), так что, по существу, здесь больше нет и минимальной частоты, ниже которой невозможно распространение.

5. Волноводы эллиптического сечения и вопрос об устойчивости волн в волноводах

Л. Бриллюэн изучал распространение волн в волноводах эллиптического сечения и воспользовался результатами этого исследования для анализа важного вопроса об устойчивости волн, распространяющихся в обычных волноводах круглого сечения. Дадим краткий обзор этой проблемы.

При изучении волноводов эллиптического сечения мы будем считать, что ось z совпадает с осью волновода, и будем определять точки $M(x, y)$ нормального сечения эллиптическими координатами x_1 и x_2 , определенными соотношениями

$$x = d \operatorname{ch} x_1 \cos x_2, \quad y = d \operatorname{sh} x_1 \sin x_2. \quad (2.66)$$

Линии $x_1 = \operatorname{const}$ определяются уравнением

$$\left(\frac{x}{d \operatorname{ch} x_1} \right)^2 + \left(\frac{y}{d \operatorname{sh} x_1} \right)^2 = 1. \quad (2.67)$$

Следовательно, это эллипсы, оси которых a и b равны

$$a = d \operatorname{ch} x_1, \quad b = d \operatorname{sh} x_1, \quad \frac{b}{a} = \operatorname{th} x_1. \quad (2.68)$$

Расстояние между фокусами $2\sqrt{a^2 - b^2}$ равно $2d$.

Линии $x_2 = \operatorname{const}$ — гиперболы; система координат x_1, x_2 ортогональна. Находим,

$$ds^2 = dz^2 + e_1^2 dx_1^2 + e_2^2 dx_2^2, \quad \text{где } e_1 = e_2 = d \sqrt{\operatorname{ch}^2 x_1 - \cos^2 x_2}. \quad (2.69)$$

Функция U должна быть решением уравнения

$$\frac{1}{d^2(\operatorname{ch}^2 x_1 - \cos^2 x_2)} \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} \right] + \alpha^2 U = 0 \quad (k^2 - k_z^2 = \alpha^2). \quad (2.70)$$

Если считать, как обычно

$$U = \Phi_1(x_1) \cdot \Phi_2(x_2) e^{i(kct - k_z z)},$$

то увидим, что некоторое выражение, зависящее только от x_1 , должно быть равно некоторому выражению, зависящему только

от x_2 ; это возможно, если эти два выражения равны одной и той же постоянной R . Таким образом, получаем два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\Phi_1}{dx_1^2} + (\alpha^2 d^2 \operatorname{ch}^2 x_1 - R)\Phi_1 &= 0, \\ \frac{d^2\Phi_2}{dx_2^2} + (-\alpha^2 d^2 \cos^2 x_2 + R)\Phi_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.71)$$

Второе уравнение (2.71) принадлежит к типу уравнений Матье, а первое — приводится к тому же типу, если принять ix_1 в качестве переменной вместо x_1 . Константы α и R должны быть одинаковыми в обоих уравнениях, а значение R должно быть выбрано в зависимости от α таким образом, чтобы решение было периодическим по x_2 с периодом 2π . Когда R выбрано таким образом, второе уравнение (2.71) допускает в качестве однозначных решений функции Матье

$$Ce_0(x_2), Ce_1(x_2), Se_1(x_2), \dots, Ce_n(x_2), Se_n(x_2), \dots,$$

форма которых зависит от значения параметра α . При α , стремящимся к нулю, эти функции стремятся соответственно к функциям

$$1, \cos x_2, \sin x_2, \dots, \cos nx_2, \sin nx_2, \dots$$

Таким образом, имеем

$$\text{или} \quad \left. \begin{aligned} U(z, x_1, x_2, t) &= Ce_n(ix_1) Ce_n(x_2) \cdot P \\ U(z, x_1, x_2, t) &= Se_n(ix_1) Se_n(x_2) \cdot P. \end{aligned} \right\} \quad (2.72)$$

Бриллюэн составил график, изображающий значения R как функции от α , соответствующие Ce_n и Se_n .

Стенка волновода определена заданным значением X_1 переменной x_1 . Для этого значения x_1 составляющие E_z и E_{x_2} электрического поля, согласно граничным условиям, должны быть равны нулю.

Для волн электрического типа имеем:

$$E_z = \alpha^2 U, \quad E_{x_2} = -\frac{ik_2}{e_1} Ce_n(ix_1) Ce'_n(x_2) \cdot P. \quad (2.73)$$

Граничные условия определяют значения α , при которых функции $Ce_n(ix_1)$ и $Se_n(ix_1)$ равны нулю. Таким образом, находим

для α две серии приемлемых значений $\alpha_{c,n,m}$ и $\alpha_{s,n,m}$, откуда получаются и две серии волн электрического типа, которые мы условно обозначим как волны типа $(E_{c,n,m})$ и волны типа $(E_{s,n,m})$. Каждому собственному значению α будет соответствовать для данного k особый вид распространения вдоль волновода, совершенно аналогично тому, что мы имели в предыдущих разделах.

Для волн магнитного типа имеем

$$E_z = 0, \quad E_{x_2} = \frac{ik}{\epsilon_1} \frac{Ce'_n}{Se'_n}(ix_1) \frac{Ce_n}{Se_n}(x_2) \cdot P, \quad (2.74)$$

и нам надо искать значения α , которые обращают в нуль как $Ce'_n(ix_1)$, так и $Se'_n(ix_1)$. Таким образом, найдем две серии волн магнитного типа, которые обозначим через $(H_{s,m,n})$ и $(H_{c,m,n})$.

Л. Бриллюэн вычислил для различных волн $(E_0, E_{s_1}, E_{c_1}, H_0, H_{s_1}, H_{c_1}, H_{s_2}$ и $H_{c_2})$ значение α^2 как функцию большой оси эллипса, деформируемого таким образом, чтобы сохранялась постоянная его площадь. Он использовал результаты этого исследования для оценки степени устойчивости распространений, которые могут иметь место в цилиндрическом волноводе. На самом деле, допустим, что две из рассмотренных волн обладают одной и той же скоростью распространения, когда сечение волновода деформируется в круг, но обладают заметно различными скоростями, когда сечение является эллипсом, эксцентриситет которого немного отличен от 1. Тогда одно из возможных распространений в круглом волноводе будет неустойчивым, так как если какое-либо место волновода станет вследствие случайного сплющивания слегка эллиптическим, данная волна может расколоться на две волны различных скоростей. Устойчивость волн в волноводе круглого сечения зависит от того закона, по которому могут изменяться скорости распространения, когда слегка деформируют трубу. Для строгого решения этой проблемы надо было бы изучить изменения собственных значений α при деформации границы волновода: это частный случай общей довольно трудной проблемы, к решению которой приступил Л. Бриллюэн, а за ним и Н. Кабрера. Развитие их методов позволит решить важную и трудную проблему устойчивости возможных распространений в электрических волноводах.

Простое сравнение с волноводом эллиптического сечения дало Бриллюэну возможность заключить, что волны (E_0) и (H_0) волновода круглого сечения устойчивы, а волна (H_2) почти устойчива, тогда как волны (E_1) и (H_1) , а также, вероятно, и волна (H_3) неустойчивы. Устойчивость волны (H_0) может представить интерес для радиотехники, ибо, как мы увидим дальше, волна (H_0) обладает тем особенным свойством, что для нее потери энергии в стенках с конечной проводимостью (что и имеет место во всех реальных волноводах) уменьшаются при увеличении частоты. Тем не менее, волна (H_0) , будучи устойчивой при малой деформации сечения трубы, могла бы не быть устойчивой при боковом искривлении волновода, т. е. для колена трубы. В самом деле, волна (H_0) имеет ту же скорость распространения, что и волна (E_1) при таком же значении k , как это явствует из равенства $\mu_1^{(1)}$ и $\nu_1^{(0)}$ (см. фиг. 3). Кроме того, в том месте, где волновод изогнут, составляющая E_φ волны (H_0) будет создавать малую продольную составляющую; однако эта составляющая будет равна нулю в плоскости, которая содержит слегка изогнутую ось волновода. Следовательно, она будет идентична электрической продольной составляющей волны (E_1) , имея узловую линию в данной плоскости. Отсюда следует, что колено может превратить часть волны (H_0) в волну (E_1) . Если в волноводе имеется несколько колен, то последствия этого рода смогут накопиться благодаря равенству скоростей распространения для (E_1) и (H_0) , равенству, которое поддержит необходимое для накопления соотношение фаз. Поэтому наличие колен может представить опасность для устойчивости (H_0) .

Бриллюэн указал и на другое явление, которое может мешать на практике устойчивому распространению волн в волноводах. А именно — граничная частота очень быстро меняется с изменением формы сечения волновода. Поэтому волна частоты, немного превышающей граничную частоту, может быть совершенно остановлена слегка деформированной частью этого волновода.

Мы видим, сколько интересных вопросов возникло как в теории, так и на практике в связи с проблемой устойчивости распространения волн в волноводах. Они, повидимому, далеко еще не разрешены полностью.

6. Фазовая и групповая скорости и средняя скорость распространения энергии в волноводах

Все рассмотренные в этой главе волны характеризуются «множителем распространения»

$$P = e^{i(kct - k_z z)}, \text{ где } k^2 = k_z^2 + \alpha^2. \quad (2.75)$$

Каждая возможная волна характеризуется одним из собственных значений постоянной α , соответствующей типу рассмотренных волноводов. Для заданного собственного значения α всякому значению k соответствует значение k_z , и скорость распространения фазы есть

$$V = c \frac{k}{k_z} > c. \quad (2.76)$$

Для двух очень близких значений k , например k_0 и $k_0 + dk$, у нас будет два очень близких значения k_z , а именно k_z^0 и $k_z^0 + \left(\frac{dk_z}{dk}\right)_{k_0} dk$. Рассмотрим сумму бесконечного множества волн со значениями k , лежащими в малом интервале от k_0 до $k_0 + \delta k$. Такая суперпозиция называется группой волн и аналитически изображается интегралом

$$\int_{k_0}^{k_0 + \delta k} a(k) e^{i(kct - k_z z)} dk = \int_0^{\delta k} a(\varepsilon) e^{i\varepsilon \left[ct - z \left(\frac{dk_z}{dk} \right)_{k_0} \right]} d\varepsilon e^{i(k_0 ct - k_z^0 z)}. \quad (2.77)$$

Последний множитель, вынесенный за знак интеграла, есть множитель фазы, соответствующий k_0 . Что же касается интеграла, то он представляет собой амплитуду, являющуюся функцией аргумента, взятого в прямые скобки в показателе степени экспоненты. Очевидно, что эта амплитуда перемещается вдоль оси z со скоростью u , выражаемой формулой

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial k_z}{\partial k} \right)_{k_0}. \quad (2.78)$$

Скорость u называется групповой скоростью, отвечающей значению k_0 переменной k . Но поскольку

$$\frac{\partial k_z}{\partial k} = \frac{k}{k_z}, \quad (2.79)$$

то групповая скорость, отвечающая k , будет

$$u = c \frac{k_z}{k} = \frac{c^2}{V} < c. \quad (2.80)$$

Полученные соотношения совершенно аналогичны тем, которые встречаются в волновой механике, в которой прямолинейное и равномерное движение частицы с массой покоя μ_0 изображают в виде распространения плоской монохроматической волны Ψ . Выбирая ось z за направление распространения, эту волну записывают в виде

$$\Psi = A e^{i(kct - k_z z)}, \quad (2.81)$$

причем

$$k^2 - k_z^2 = \frac{4\pi^2}{h^2} \mu_0^2, \quad (2.82)$$

где h — постоянная Планка. Тогда легко найти для фазовой скорости V и для групповой скорости u волны Ψ выражения (2.76) и (2.80), т. е. хорошо известное соотношение

$$uV = c^2. \quad (2.83)$$

Так как допускают, что фотоны обладают собственной массой, равной нулю или очень близкой к нулю, то волна Ψ фотона должна соответствовать $k = k_z$, т. е. распространению со скоростью c . Это вполне соответствует распространению электромагнитной волны в пустоте. Но если электромагнитная волна заключена в волноводе, то между k и k_z мы имеем соотношение (2.75), где α отлична от нуля и равна одному из своих собственных значений, соответствующих форме рассматриваемого волновода. С точки зрения волновой механики тогда все происходит так, как будто фотон имеет собственную массу, определенную формой волновода и рассматриваемым собственным значением α . Итак, можно сказать, что в данном волноводе фотон может обладать целой серией возможных собственных масс.

Оставим в стороне все эти соображения, удаляющие нас от предмета, и определим в волноводе наряду с фазовой и групповой скоростями среднюю скорость v распространения энергии. Согласно определению, эта скорость будет равна частному от деления среднего потока электромагнитной энергии вдоль оси волновода через его нормальное сечение на среднее значение энергии,

приходящейся на единицу длины волновода; это определение совершенно естественно. Итак, по формулам (1.24) пишем:

$$v = \frac{c \int_S \{[\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}]_z + [\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*]_z\} d\sigma}{\int_V \{ |E|^2 + |H|^2 \} d\tau}, \quad (2.84)$$

причем V — объем единицы длины волновода и S — площадь его нормального сечения.

В ряде простых случаев (волноводы прямоугольного, круглого сечений и т. п.) можно проверить, что скорость v равна групповой скорости (2.80). Докажем в общем виде, что, какова бы ни была форма нормального сечения волновода, это равенство всегда имеет место. Проведем доказательство для волн электрического типа; для волн магнитного типа доказательство будет совершенно аналогичным.

Для волн электрического типа у нас будут следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} E_z &= \alpha^2 U, & E_2 &= -\frac{ik_2}{e_2} \frac{\partial U}{\partial x_2}, & E_3 &= -\frac{ik_3}{e_3} \frac{\partial U}{\partial x_3}, \\ H_z &= 0, & H_2 &= -\frac{k}{k_2} E_3, & H_3 &= \frac{k}{k_3} E_2, \end{aligned} \right\} \quad (2.85)$$

где U — допустимое решение уравнения (2.5). Соотношение, требующее доказательства, следующее:

$$\int_S \{[\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}]_z + [\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*]_z\} d\sigma = \frac{k_z}{k} \int_V [|E|^2 + |H|^2] d\tau. \quad (2.86)$$

Подставляя H_2 и H_3 из (2.85), можем также написать:

$$\begin{aligned} & 2 \frac{k^2}{k_z^2} \int_S [|E_2|^2 + |E_3|^2] d\sigma = \\ & = \int_V \left[|E_z|^2 + (|E_2|^2 + |E_3|^2) \left(1 + \frac{k^2}{k_z^2}\right) \right] d\tau, \end{aligned} \quad (2.87)$$

или, подставляя E_2 , E_2 и E_3 и замечая, что области интегрирования совпадают:

$$\int_V \alpha^2 |U|^2 d\tau = \int_V \left[\frac{1}{e_2^2} \frac{\partial U^*}{\partial x_2} \frac{\partial U}{\partial x_2} + \frac{1}{e_3^2} \frac{\partial U^*}{\partial x_3} \frac{\partial U}{\partial x_3} \right] d\tau. \quad (2.88)$$

Так как надо, чтобы на стенке волновода $E_z = 0$, то согласно первому уравнению (2.85) U всюду на этой стенке равно нулю. Заметив, что

$$d\tau = e_2 e_3 dx_2 dx_3 dz \quad (2.89)$$

и интегрируя по частям второй член (2.88), получаем

$$\int_V U^* \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{e_3}{e_2} \frac{\partial U}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{e_2}{e_3} \frac{\partial U}{\partial x_3} + e_2 e_3 \alpha^2 U \right] dx_2 dx_3 dz = 0. \quad (2.90)$$

Таково соотношение, справедливость которого мы хотим доказать. Но оно очевидно, так как U — решение уравнения (2.5). Следовательно, какова бы ни была форма нормального сечения волновода, средняя скорость распространения энергии в волноводе равна групповой скорости.

7. Возбуждение волноводов

До сих пор рассматривались электромагнитные поля в волноводе вне связи с источниками, их создавшими. Здесь будет кратко продискутирован этот вопрос.

Проблеме возбуждения волноводов был посвящен ряд работ [28, 40, 41], но при этом применялись частные методы, которые допускали решение лишь при весьма специальных (и притом простейших) предположениях о форме и расположении возбуждающих проводников, распределении тока на этих проводниках и т. п. Мы изложим метод решения задачи, который дает возможность получить решения для волновода произвольного сечения при произвольном распределении возбуждающих токов и зарядов. Кроме того, этот метод позволяет рассмотреть переходные режимы [27].

Рассмотрим цилиндрический волновод произвольного сечения, в котором находятся в ограниченном объеме V заданные токи с плотностью $\mathbf{i}(x, y, z, t)$ и заряды $\rho(x, y, z, t)$. Электромагнитные поля будем выражать через векторный и скалярный потенциалы, удовлетворяющие уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{A} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{i}, \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \Delta V &= 4\pi \rho. \end{aligned} \right\} \quad (2.91)$$

Потенциалы \mathbf{A} и V связаны соотношением (1.34) и на поверхности, ограничивающей волновод, удовлетворяют граничным условиям

$$[\mathbf{n} \times \mathbf{A}] = 0, \quad V = 0, \quad (2.92)$$

где \mathbf{n} — нормаль к S . Кроме того, мы должны потребовать отсутствия волн, бегущих вдоль цилиндра к объему V .

Выберем ортогональную систему координат z, x_2, x_3 и направим ось z вдоль волновода.

Будем искать решение для \mathbf{A} и V в виде рядов

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A} &= \sum_m a_m(z, t) \mathbf{A}_m(x_2; x_3) \\ V &= \sum_n b_n(z, t) V_n(x_2; x_3). \end{aligned} \right\} \quad (2.93)$$

Здесь \mathbf{A}_m и V_n — решения двумерных внутренних задач

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{\perp} \mathbf{A}_m + \alpha_m^2 \mathbf{A}_m &= 0 \text{ на } S_{\perp} \\ [\mathbf{n} \times \mathbf{A}_m] &= 0 \text{ на } S \\ \Delta_{\perp} V_n + \alpha_n^2 V_n &= 0 \text{ на } S_{\perp} \\ V_n &= 0 \text{ на } S, \end{aligned} \right\} \quad (2.94)$$

где S_{\perp} — поперечное сечение волновода, S — граница поперечного сечения, Δ_{\perp} — двумерный оператор Лапласа в плоскости S_{\perp} .

Функции \mathbf{A}_m и V_n — ортогональны, и мы их будем нормировать к единице, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \int_{S_{\perp}} \mathbf{A}_{m'}^* \mathbf{A}_m d\sigma &= \begin{cases} 1 & (m' = m) \\ 0 & (m' \neq m) \end{cases} \\ \int_{S_{\perp}} V_{n'}^* V_n d\sigma &= \begin{cases} 1 & (n' = n) \\ 0 & (n' \neq n). \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (2.95)$$

Здесь звездочкой обозначены комплексно сопряженные величины, а $d\sigma$ — элемент поверхности S_{\perp} .

Неопределенные пока коэффициенты a_m и b_n находим из уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 a_m}{\partial z^2} - \alpha_m^2 a_m - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 a_m}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} i m, \\ \frac{\partial^2 b_n}{\partial z^2} - \alpha_n^2 b_n - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 b_n}{\partial t^2} &= -4\pi p_n, \end{aligned} \right\} \quad (2.96)$$

которые получаются из (2.91), если обе части умножить скалярно на $\mathbf{A}_m^* d\sigma$ и $V^* d\sigma$ проинтегрировать по поперечному сечению, учтя (2.93) — (2.95). В (2.96) введены обозначения

$$i_m(z, t) = \int_{S_{\perp}} \mathbf{i} \mathbf{A}_m^* d\sigma; \quad \rho_n(z, t) = \int_{S_{\perp}} \rho V_n^* d\sigma. \quad (2.97)$$

Таким образом, задача о возбуждении волновода сведена к определению собственных функций \mathbf{A}_m и V_n волновода и вычислению коэффициентов a_m и b_n из уравнений (2.96). По поводу вычисления собственных функций заметим следующее. Вычисление скалярных функций V_n не представляет затруднений, и это было сделано выше (для функции U Борнуса). Вычисление векторных функций \mathbf{A}_m , вообще говоря, представляет значительно большие трудности. Но можно показать, что векторная функция \mathbf{A}_m может быть вычислена через две скалярные функции V_m и V_{μ} , являющиеся решением следующих задач:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{\perp} V_m + \alpha_m^2 V_m &= 0 && \text{на } S_{\perp} \\ V_m &= 0 && \text{на } S \\ \Delta_{\perp} V_{\mu} + \alpha_{\mu}^2 V_{\mu} &= 0 && \text{на } S_{\perp} \\ \frac{\partial V_{\mu}}{\partial n} &= 0 && \text{на } S \end{aligned} \right\} \quad (2.98)$$

Таким образом, в качестве V_m могут быть взяты функции V_n . Через эти функции векторная функция \mathbf{A}_m выразится так:

$$\mathbf{A}_m = a_{ln} \mathbf{L}_n + a_{gn} \mathbf{G}_n + a_{cn} \mathbf{C}_{\mu}, \quad (2.99)$$

где

$$\mathbf{L}_n = V_n \mathbf{z}_0, \quad \mathbf{G}_n = \frac{1}{\alpha_n} \text{grad } V_n; \quad \mathbf{C}_{\mu} = \frac{1}{\alpha_{\mu}} [\text{grad } V_{\mu} \times \mathbf{z}_0]. \quad (2.100)$$

Здесь \mathbf{z}_0 — единичный вектор, направленный вдоль оси z .

Решение уравнений (2.96) относительно просто провести, применив преобразование Фурье. Сделаем это для случая установившихся гармонических колебаний, когда в (2.96) все величины зависят от времени по гармоническому закону ($e^{i\omega t}$). Тогда уравнения (2.96) переходят в следующие:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 a_m}{dz^2} + \gamma_m^2 a_m &= -\frac{i\pi}{c} i_m \\ \frac{d^2 b_n}{dz^2} + \gamma_n^2 b_n &= -4\pi \rho_n \end{aligned} \right\} \quad (2.101)$$

$$\gamma_{m,n}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \alpha_{m,n}^2. \quad (2.101a)$$

Так как уравнения одинаковы, то мы проведем решение для первого из них.

Прежде всего заметим, что общее решение уравнений (2.101) без правой части дает волны, бегущие из бесконечности к нашему объему V . Так как эти волны мы должны отбросить, то нам достаточно найти частные решения уравнений (2.101).

Будем искать это решение в виде интеграла Фурье

$$a_m(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{a}_m(\gamma) e^{-i\gamma z} d\gamma. \quad (2.102)$$

Подставив (2.102) в (2.101) и применив обратное преобразование Фурье, получаем

$$\bar{a}_m(\gamma) = \frac{2}{\gamma^2 - \gamma_m^2} \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} i_m(z') e^{+i\gamma z'} dz'. \quad (2.103)$$

Наконец, подставив (2.103) в (2.102), переменив порядок интегрирования и подставив i_m из (2.97), находим

$$a_m(z) = \frac{2}{c} \int_V \mathbf{i}(x'_2; x'_3; z') \mathbf{A}_m^*(x'_2; x'_3) \cdot I_m(z - z') dV'. \quad (2.104)$$

Здесь введено сокращение

$$I_m(z - z') = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\gamma(z-z')}}{\gamma^2 - \gamma_m^2} d\gamma. \quad (2.105)$$

Последний интеграл легко вычисляется применением теоремы о вычетах и получается равным

$$I_m(z - z') = \frac{\pi i}{\gamma_m} e^{-i\gamma_m |z - z'|}. \quad (2.106)$$

Подставляя (2.106) в (2.104), находим

$$a_m(z) = \frac{2\pi i}{\gamma_m} \frac{1}{c} \int_V \mathbf{i}(x'_2; x'_3; z') \mathbf{A}_m^*(x'_2; x'_3) e^{-i\gamma_m |z - z'|} dV'. \quad (2.107)$$

Аналогично, для $b_n(z)$ получается следующее выражение:

$$b_n(z) = \frac{2\pi i}{\gamma_m} \int_V \rho(x'_2; x'_3; z') V_n^*(x'_2; x'_3) e^{i\gamma_n |z - z'|} dV'. \quad (2.108)$$

Формула (2.107) дает коэффициенты a_{in} , a_{gn} и a_{cm} в (2.109), если вместо A^* в правую часть подставить соответственно L_n , G_n , C_n .

Из условия (1.34) легко получаем следующее соотношение между коэффициентами:

$$\frac{\partial a_{in}}{\partial z} - \alpha_n a_{gn} + \frac{1}{c} \frac{\partial b_n}{\partial t} = 0. \quad (2.109)$$

Поэтому достаточно определить две из этих трех величин (например, a_{in} и a_{gn} по (2.107)), третья найдется из (2.109). Найдя A и V , определим поля по формулам (1.31).

В заключение этого раздела отметим, что этот же метод позволяет решить задачу о возбуждении полубесконечного волновода (ограниченного с одной стороны плоской металлической стенкой), для чего достаточно учесть решение уравнения (2.101) без правой части и использовать для определения постоянной интегрирования условие исчезновения тангенциальных электрических полей на этой стенке.

Этот метод может быть в принципе применен и для решения задачи о возбуждении замкнутого объема. Но здесь гораздо проще разлагать решение сразу по собственным функциям соответствующей объемной граничной задачи, т. е. разлагать решение в ряд по собственным колебаниям рассматриваемого объема [42]. Коэффициенты разложения будут функциями только времени, и для их определения получаются уравнения второго порядка в полных производных.

При решении же задачи о возбуждении волновода мы не можем применить разложение по собственным волнам, считая коэффициенты разложения функциями только времени. Это видно из того, что бегущие волны с неизменной амплитудой будут существовать только справа и слева от объема, занимаемого токами и зарядами. В самом же объеме амплитуда этих волн зависит от положения рассматриваемого сечения: ближе к левому краю объема будут преобладать волны, бегущие налево, ближе к правому краю объема — волны, бегущие направо. Сказанное легко усмотреть из (2.107), если разбить интеграл по z' на два: от 0 до z и от z до l , где 0 и l — координаты крайних точек

объема, занимаемого возбуждающими токами:

$$a_n(z) = \left(\int_0^z K_n(z') e^{i\gamma_n z'} dz' \right) e^{-i\gamma_n z} + \left(\int_z^l K_n(z') e^{-i\gamma_n z'} dz' \right) e^{i\gamma_n z}. \quad (2.110)$$

Здесь через $K_n(z')$ обозначен интеграл по поперечному сечению. Как видно из (2.110), для $0 < z < l$ имеют место волны обоих направлений, причем их амплитуды зависят от координаты z . Но для $z > l$ и для $z < 0$ мы получаем соответственно

$$\left. \begin{aligned} a_n(z) &= \left(\int_0^l K_n(z') e^{i\gamma_n z'} dz' \right) e^{-i\gamma_n z} & z \geq l \\ a_n(z) &= \left(\int_0^l K_n(z') e^{-i\gamma_n z'} dz' \right) e^{i\gamma_n z} & z \leq 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.111)$$

НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

1. Собственные колебания

Рассмотрим область пространства, ограниченную замкнутой металлической идеально проводящей поверхностью. Будем ее называть полым резонатором. В таком полном резонаторе может установиться стационарное электромагнитное поле, которое называют собственным электромагнитным колебанием этого резонатора. С помощью метода Борнуса можно вычислить в каждом частном случае две серии собственных колебаний резонатора: собственных колебаний электрического типа и собственных колебаний магнитного типа.

Общая проблема определения собственных колебаний чрезвычайно сложна, если резонатор не обладает простой геометрической формой. Изучим здесь только несколько частных случаев, представляющих довольно большой интерес для радиотехники ультракоротких волн.

Сначала займемся некоторыми вопросами, решение которых непосредственно вытекает из расчетов предыдущей главы. Рассмотрим электрический волновод; ограничим его двумя проводящими стенками, перпендикулярными к его оси и расположенными одна от другой на расстоянии l ; таким образом будет создан полый резонатор, собственные колебания которого легко найти, если предварительно были определены возможные типы волн в рассматриваемом волноводе. Волны характеризуются множителем

$$P = e^{i(kct - k_z z)}, \quad (3.1)$$

который соответствует распространению в положительном направлении оси z . Меняя k_z на $-k_z$, получаем, следовательно, волну, распространяющуюся в отрицательном направлении оси z . При суперпозиции двух волн, распространяющихся в обратных направлениях, получаем стоячую волну, зависящую от z через

множитель формы $\frac{\sin}{\cos} k_z z$. Если напишем, что электрическое поле волны нормально двум крайним стенкам (абсциссы которых всегда можно предположить равными 0 и l), то мы тем самым полностью определим возможные стоячие волны, из которых одна часть будет магнитного типа, другая — электрического.

2. Собственные колебания прямоугольного параллелепипеда

Поступив с волноводом прямоугольного сечения так, как было указано в разделе 1, получим прямоугольный полый резонатор с ребрами a , b , l .

Чтобы найти стоячие волны этого резонатора, используем формулы (2.16) и (2.17), которые скомбинируем с такими же формулами, в которых k_z заменено на $-k_z$, так чтобы получить комбинации типа $\frac{\sin}{\cos} k_z z$. Потом выберем из этих решений такие, которые удовлетворят новым граничным условиям

$$E_x = E_y = 0 \quad \text{для } z=0 \text{ и } z=l. \quad (3.2)$$

Эти граничные условия заставят нас выбрать в выражениях E_x и E_y функцию $\sin k_z z$ и, кроме того, положить, что

$$k_z = \frac{n_3 \pi}{l} \quad (n_3 - \text{целое}). \quad (3.3)$$

Для большей симметрии записи обозначим

$$\gamma_1 = \frac{n_1 \pi}{a}, \quad \gamma_2 = \frac{n_2 \pi}{b}, \quad \gamma_3 = k_z = \frac{n_3 \pi}{l}. \quad (3.4)$$

Таким образом, для волн электрического типа получим:

$$\left. \begin{aligned} E_z &= (k^2 - \gamma_3^2) \sin \gamma_1 x \sin \gamma_2 y \cos \gamma_3 z e^{ikct}, \\ E_x &= -\gamma_3 \gamma_1 \cos \gamma_1 x \sin \gamma_2 y \sin \gamma_3 z e^{ikct}, \\ E_y &= -\gamma_3 \gamma_2 \sin \gamma_1 x \cos \gamma_2 y \sin \gamma_3 z e^{ikct}, \\ H_z &= 0, \\ H_x &= ik \gamma_2 \sin \gamma_1 x \cos \gamma_2 y \cos \gamma_3 z e^{ikct}, \\ H_y &= -ik \gamma_1 \cos \gamma_1 x \sin \gamma_2 y \cos \gamma_3 z e^{ikct}. \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

Легко видеть, что волны этого типа, соответствующие совокупностям целых чисел $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$,

(1, 0, 0), (1, 0, 1) и (0, 1, 1), отсутствуют. Стационарная волна наиболее низкой частоты соответствует совокупности (1, 1, 0).

Вычислим теперь частоты, замечая, что в силу формулы (2.18) имеется формула:

$$k^2 = \frac{4\pi^2\nu^2}{c^2} = \alpha^2 + k_z^2 = \left(\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} + \frac{n_3^2}{l^2} \right) \pi^2. \quad (3.6)$$

Для волн магнитного типа аналогичным образом найдем

$$\left. \begin{aligned} E_z &= 0, \\ E_x &= -ik\gamma_2 \cos \gamma_1 x \sin \gamma_3 y \sin \gamma_3 z e^{ikt}, \\ E_y &= ik\gamma_1 \sin \gamma_1 x \cos \gamma_2 y \sin \gamma_3 z e^{ikt}, \\ H_x &= (k^2 - \gamma_3^2) \cos \gamma_1 x \cos \gamma_2 y \sin \gamma_3 z e^{ikt}, \\ H_y &= -\gamma_3 \gamma_1 \sin \gamma_1 x \cos \gamma_2 y \cos \gamma_3 z e^{ikt}, \\ H_z &= -\gamma_3 \gamma_2 \cos \gamma_1 x \sin \gamma_2 y \cos \gamma_3 z e^{ikt}. \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

Волны наиболее низкой частоты соответствуют системам (1, 0, 1) и (0, 1, 1), причем частоты всегда даются формулой (3.6).

Мы видим, что для волн (3.5) и (3.7) ось z играет особую роль. Ввиду физического равноправия всех трех ребер параллелепипеда существуют также другие стоячие волны, формулы которых получаются из (3.5) и (3.7) путем перестановки x , y и z .

3. Собственные колебания прямого круглого цилиндра

Ограничивая волновод круглого сечения так, как было указано в разделе 1, получаем полый резонатор в виде прямого круглого цилиндра.

Стоячие волны получаются с помощью формул (2.31) и (2.32), скомбинированных таким образом, чтобы получить множителем $\frac{\sin}{\cos} k_z z$. Приняв в расчет новые граничные условия

$$E_\varphi = E_r = 0 \quad \text{для } z=0 \text{ и } z=l, \quad (3.8)$$

мы выберем $\sin k_z z$ в выражениях E_φ и E_r и будем вынуждены принять

$$k_z = \frac{n\pi}{l} \quad (n - \text{целое число}). \quad (3.9)$$

Для волн электрического типа мы, следовательно, найдем

$$\left. \begin{aligned} E_z &= \alpha^2 J_m(\alpha\rho) \frac{\cos}{\sin} m\varphi \cos \frac{n\pi z}{l} e^{ikct}, \\ E_\rho &= -\alpha \frac{n\pi}{l} J'_m(\alpha\rho) \frac{\cos}{\sin} m\varphi \sin \frac{n\pi z}{l} e^{ikct}, \\ E_\varphi &= -\frac{nm\pi}{l\rho} J_m(\alpha\rho) \frac{-\sin}{\cos} m\varphi \sin \frac{n\pi z}{l} e^{ikct}, \\ H_z &= 0, \\ H_\rho &= -\frac{ikm}{\rho} J_m(\alpha\rho) \frac{\sin}{-\cos} m\varphi \cos \frac{n\pi z}{l} e^{ikct}, \\ H_\varphi &= -ika J'_m(\alpha\rho) \frac{\cos}{\sin} m\varphi \cos \frac{n\pi z}{l} e^{ikct}, \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

с

$$\alpha = \frac{\mu_i^{(m)}}{R}, \quad k^2 = \alpha^2 + k_z^2 = \frac{\mu_i^{(m)2}}{R^2} + \frac{n^2\pi^2}{l^2}, \quad (3.11)$$

где $\mu_i^{(m)}$ есть i -й не равный нулю корень функции J_m .

Каждая стоячая волна характеризуется тремя числами (n, m, i) . Волна самой низкой частоты есть волна $(0, 0, 1)$. Это стационарное колебание, электрическое поле которого прямолинейно и параллельно оси z , а магнитное поле — вихревое. Оно является электрическим колебанием, совершающимся вдоль образующей цилиндра и аналогично колебанию круглого конденсатора. Таким же путем для волн магнитного типа мы получим формулы:

$$\left. \begin{aligned} E_z &= 0 \\ E_\rho &= \frac{ikm}{\rho} J_m(\alpha\rho) \frac{\sin}{-\cos} m\varphi \sin \frac{n\pi z}{l} e^{ikct}, \\ E_\varphi &= ika J'_m(\alpha\rho) \frac{\cos}{\sin} m\varphi \sin \frac{n\pi z}{l} e^{ikct}, \\ H_z &= \alpha^2 J_m(\alpha\rho) \frac{\cos}{\sin} m\varphi \sin \frac{n\pi z}{l} e^{ikct}, \\ H_\rho &= \frac{n\pi}{l} \alpha J'_m(\alpha\rho) \frac{\cos}{\sin} m\varphi \cos \frac{n\pi z}{l} e^{ikct}, \\ H_\varphi &= -\frac{nm\pi}{l\rho} J_m(\alpha\rho) \frac{\sin}{-\cos} m\varphi \cos \frac{n\pi z}{l} e^{ikct}, \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

с

$$\alpha = \frac{\nu_i^{(m)}}{R}, \quad k^2 = k_z^2 + \alpha^2 = \frac{\nu_i^{(m)2}}{R^2} + \frac{n^2\pi^2}{l^2}, \quad (3.13)$$

где $\nu_i^{(m)}$ есть i -й не равный нулю корень функций J'_m .

Каждая стоячая волна и здесь характеризуется тремя целыми числами (n, m, i) . Волной самой низкой частоты будет волна $(1, 1, 1)$. У волны $(1, 0, 1)$ более высокая частота, потому что $\nu_1^{(0)} > \nu_1^{(1)}$; ее электрическое поле — вихревое, а магнитное поле на оси — продольное. Она соответствует электрическим осцилляциям, происходящим вдоль контура поперечных сечений цилиндра. Ее можно сравнить с колебаниями соленоида с короткозамкнутыми витками.

4. Собственные колебания тора прямоугольного сечения

Не будем задерживаться на изучении собственных колебаний эллиптического цилиндра, которое легко было бы провести, исходя из теории, изложенной в разделе 5, гл. II, но применим рассуждения раздела 1 настоящей главы к коаксиальной линии. Ограничивая коаксиальную линию с обоих концов, получаем тор прямоугольного сечения. Отыщем теперь его собственные колебания.

Нет надобности явно писать формулы, дающие в данном случае электромагнитные поля стоячих волн электрического и магнитного типа. На самом деле из предыдущего исследования коаксиальной линии следует, что мы переходим от случая круглого цилиндра к коаксиальной линии, заменяя в формулах, полученных для полей в первом случае, функцию $J_m(\alpha\rho)$ линейной комбинацией $AJ_m(\alpha\rho) + BN_m(\alpha\rho)$. Поэтому будет достаточно произвести такую же замену в формулах (3.10) и (3.12), чтобы получить стоячие волны тора прямоугольного сечения, причем стороны прямоугольника будут l и $R_2 - R_1$, где R_1 и R_2 — радиусы двух цилиндров коаксиальной линии.

Для волн электрического типа, полученных таким образом, придется взять для α вместо значения (3.11) один из корней трансцендентного уравнения

$$J_m(\alpha R_1) N_m(\alpha R_2) = J_m(\alpha R_2) N_m(\alpha R_1), \quad (3.14)$$

что непосредственно следует из теории коаксиальной линии. Если $\alpha_1^{(m)}$, $\alpha_2^{(m)}$, ... — корни этого уравнения, то частоты будут выражаться формулой

$$k^2 = k_z^2 + \alpha^2 = \alpha_i^{(m)2} + \frac{n^2 \pi^2}{l^2}. \quad (3.15)$$

Каждая стоячая волна будет определена и в этом случае тремя целыми числами (n, m, i) . Волной самой низкой частоты будет волна $(0, 0, 1)$, соответствующая электрическому колебанию, аналогичному колебаниям кольцевого конденсатора.

Для волн магнитного типа придется взять для α вместо значения (3.13) один из корней трансцендентного уравнения

$$J'_m(\alpha R_1) N'_m(\alpha R_2) = J'_m(\alpha R_2) N'_m(\alpha R_1). \quad (3.16)$$

Если $\beta_1^{(m)}, \beta_2^{(m)}, \dots$ — корни этого уравнения, то частоты будут выражены формулой

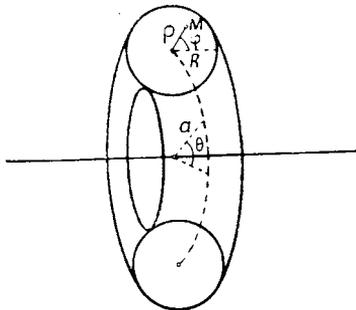
$$k^2 = k_z^2 + \alpha^2 = \beta_i^{(m)2} + \frac{\pi^2 \pi^2}{l^2}. \quad (3.17)$$

Каждая стоячая волна будет определена тремя целыми числами (n, m, i) . Волной наиболее низкой частоты будет волна $(1, 1, 1)$. Волна $(1, 0, 1)$ будет обладать более высокой частотой, ее можно сравнить с колебанием двух коаксиальных соленоидов.

5. Собственные колебания тора круглого сечения

По сравнению с тором прямоугольного сечения, изучение собственных колебаний тора круглого сечения — значительно более сложная задача. Нам неизвестно, может ли быть получено для нее строгое решение. Во всяком случае, оно не может быть больше получено по методу предыдущих разделов.

Для нахождения приближенного решения поступим следующим образом. Предположим, что тор получен из прямого цилиндра, согнутого таким образом, чтобы его ось превратилась в окружность и оба конца его соединились. Попытаемся использовать решения, полученные для волновода круглого сечения.



Фиг. 5.

Чтобы применить этот метод, отметим точки круглых меридиональных сечений радиуса R тора полярными координатами ρ и φ . Положение одного из этих меридиональных сечений будет определяться азимутом θ вокруг оси вращения тора. Место

центров меридиональных сечений — это окружность радиуса a , на которой мы отметим точки при помощи координаты $z = a\theta$.

Для применения приближенного метода исходим из выражения волн, распространение которых возможно в волноводе круглого сечения радиуса R , считая в формулах $z = a\theta$. Скомбинируем эти выражения с теми, которые мы получим, меняя k_z на $-k_z$ таким образом, чтобы получились стоячие волны: $\frac{\sin}{\cos} k_z z = \frac{\sin}{\cos} k_z a\theta$. Потребуем, чтобы электромагнитное поле было однозначным внутри тора. Это дает условие

$$k_z a \cdot 2\pi = n \cdot 2\pi \quad \text{или} \quad k_z = \frac{n}{a} \quad (n - \text{целое число}). \quad (3.18)$$

Для волн электрического типа таким образом получаем:

$$\left. \begin{aligned} E_\theta &= \alpha^2 J_m(\alpha\rho) \frac{\sin m\varphi}{\cos} \frac{\sin n\theta}{\cos} e^{ikct}, \\ E_\rho &= -\alpha \frac{n}{a} J'_m(\alpha\rho) \frac{\sin m\varphi}{\cos} \frac{-\cos n\theta}{\sin} e^{ikct}, \\ E_\varphi &= \frac{nm}{a\rho} J_m(\alpha\rho) \frac{-\cos m\varphi}{\sin} \frac{-\cos n\theta}{\sin} e^{ikct}, \\ H_\theta &= 0, \\ H_\rho &= -\frac{ikm}{\rho} J_m(\alpha\rho) \frac{-\cos m\varphi}{\sin} \frac{\sin n\theta}{\cos} e^{ikct}, \\ H_\varphi &= -ik\alpha J'_m(\alpha\rho) \frac{\sin m\varphi}{\cos} \frac{\sin n\theta}{\cos} e^{ikct}, \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

причем

$$\alpha = \frac{\mu_i^{(m)}}{R}, \quad k^2 = \alpha^2 + k_z^2 = \frac{\mu_i^{(m)2}}{R^2} + \frac{n^2}{a^2}. \quad (3.20)$$

Аналогично для волн магнитного типа получаем:

$$\left. \begin{aligned} E_\theta &= 0, \\ E_\rho &= \frac{ikm}{\rho} J_m(\alpha\rho) \frac{-\cos m\varphi}{\sin} \frac{\sin n\theta}{\cos} e^{ikct}, \\ E_\varphi &= ik\alpha J_m(\alpha\rho) \frac{\sin m\varphi}{\cos} \frac{\sin n\theta}{\cos} e^{ikct}, \\ H_\theta &= \alpha^2 J_m(\alpha\rho) \frac{\sin m\varphi}{\cos} \frac{\sin n\theta}{\cos} e^{ikct}, \\ H_\rho &= -\alpha \frac{n}{a} J'_m(\alpha\rho) \frac{\sin m\varphi}{\cos} \frac{-\cos n\theta}{\sin} e^{ikct}, \\ H_\varphi &= \frac{nm}{a\rho} J_m(\alpha\rho) \frac{-\cos m\varphi}{\sin} \frac{-\cos n\theta}{\sin} e^{ikct}, \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

причем

$$\alpha = \frac{v_i^{(m)}}{R}, \quad k^2 = \alpha^2 + k_z^2 = \frac{v_i^{(m)2}}{R^2} + \frac{n^2}{a^2}. \quad (3.22)$$

Теперь посмотрим, в каких пределах могут быть использованы эти приближенные решения. Очевидно, что предпосылкой применимости их является предположение, что на длине, равной нескольким длинам волны, тор может быть отождествлен с прямым цилиндром. Отсюда вытекает, что

$$\lambda = \frac{2\pi}{k_z} = \frac{2\pi a}{n} \ll 2\pi a. \quad (3.23)$$

Следовательно, n должно быть большим по сравнению с единицей. Таким образом, полученными формулами правильно представлены только колебания высшего порядка, для которых имеется большое число узлов и пучностей вдоль тора.

Более точное решение, действительное для всех значений n , которое могло бы представить практический интерес в радиотехнике, потребовало бы сложных вычислений, мы его здесь приводить не будем¹⁾.

6. Собственные колебания шара

Интересной проблемой является определение собственных электромагнитных колебаний внутренней области пространства, ограниченной металлической сферой, предполагаемой идеально проводящей.

Метод Боргниса будет и здесь применим. Примем, что

$$x_1 = r, \quad x_2 = \theta, \quad x_3 = \varphi, \quad ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (3.24)$$

считая, что начало сферических координат совпадает с центром шара. В этом случае

$$e_1 = 1, \quad e_2 = r, \quad e_3 = r \sin \theta. \quad (3.25)$$

Условия, необходимые для применения метода Боргниса, выполнены.

¹⁾ П. Краснушкин дал решение задачи о распространении электромагнитных волн в волноводах сложной формы. В основу решения положен разработанный им метод нормальных волн. В частности, им решена задача о распространении волн в тороидальной трубе [19]. (Прим. ред.)

Уравнение (1.47), определяющее функцию U , примет здесь форму

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right] + k^2 U = 0. \quad (3.26)$$

Волны электрического типа определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} E_r &= k^2 U + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}, & E_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta}, & E_\varphi &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \varphi}; \\ H_r &= 0, & H_\theta &= i \frac{k}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi}, & H_\varphi &= -i \frac{k}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta}. \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

Для волн магнитного типа имеем:

$$\left. \begin{aligned} E_r &= 0, & E_\theta &= i \frac{k}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi}, & E_\varphi &= -i \frac{k}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta}; \\ H_r &= -k^2 U - \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}, & H_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta}, & H_\varphi &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

Во всех рассмотренных до сих пор задачах функцию U можно было рассматривать как z -компоненту вектора Герца [электрический вектор Герца для волн типа (E), магнитный — для волн типа (H)]. Рассмотрение формул (3.27) и (3.28) показывает, что U не уподобляется радиальной компоненте вектора Герца, у которой остальные компоненты равны нулю. Этот вектор определен не по схеме, выведенной в разделе 3 гл. I. Покажем это для волн электрического типа, причем совершенно аналогичные рассуждения можно применить и к волнам магнитного типа.

Пусть Π — вектор Герца, у которого отлична от нуля только компонента Π_r . Согласно разделу 3 гл. I мы должны допустить, что

$$\begin{aligned} A_r &= \frac{1}{c} \frac{\partial \Pi_r}{\partial t}, & A_\varphi &= A_\theta = 0, \\ V &= -\operatorname{div} \Pi = - \left[\frac{\partial \Pi_r}{\partial r} + \frac{2}{r} \Pi_r \right], \end{aligned} \quad (3.29)$$

а формулы (3.27) и (3.28) соответствуют следующим определениям:

$$A_r = \frac{1}{c} \frac{\partial \Pi_r}{\partial t}, \quad A_\varphi = A_\theta = 0, \quad V = -\frac{\partial \Pi_r}{\partial r} \neq -\operatorname{div} \Pi. \quad (3.30)$$

Эти определения, в противоположность определениям (3.29), не удовлетворяют соотношениям между потенциалами Лоренца.

Однако ничто не мешает нам эти определения использовать, но тогда, как следует из формулы (1.32), у нас не будет $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{A} = 0$, и, следовательно, также не будет $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{\Pi} = 0$. В уравнение распространения для $U = \mathbf{\Pi}$, войдут дополнительные члены. С этими дополнительными членами уравнение для U принимает форму (3.26), являющуюся более простой формой, чем та, которую оно приняло, если бы не существовало дополнительных членов. Таким образом, принимая определения (3.30) и следуя методу Боргниса, имеем некоторые преимущества по сравнению с использованием обычных определений (3.29).

Отметив это, вернемся к применению метода Боргниса и отыщем решение уравнения (3.26), которое представится, как произведение функции от θ и φ на функцию от r и будет регулярной и однозначной во всем шаре. Вводя форму $U = F_1(r) F_2(\theta, \varphi)$ в уравнение (3.5), еще раз увидим, что некоторое выражение, зависящее только от r , должно быть равно некоторому выражению, зависящему только от θ и φ , а это возможно только тогда, когда эти два выражения равны одной и той же постоянной γ . Итак, получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial F_2}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 F_2}{\partial \varphi^2} + \gamma F_2 &= 0, \\ r^2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial r^2} + k^2 r^2 F_1 - \gamma F_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

Как известно, первое уравнение имеет для всех φ и θ регулярное решение только тогда, когда

$$\gamma = n(n+1) \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.32)$$

Если γ имеет одно из этих значений, то однозначным и непрерывным решением является функция Лапласа

$$Y_{n,m}(\theta, \varphi) = \frac{\sin^m \theta}{\cos \theta} P_n^m(\cos \theta) P_n^m(\cos \varphi) \quad (m \leq n). \quad (3.33)$$

Здесь $P_n^m(\cos \theta)$ являются присоединенными полиномами Лежандра, которые получаются из обыкновенных полиномов Лежандра $P_k(\cos \theta)$ по формуле

$$P_n^m(\cos \theta) = \sin^m \theta \frac{d^m P_n(\cos \theta)}{(d \cos \theta)^m}. \quad (3.34)$$

Функции Лапласа образуют полную систему ортогональных функций на сфере радиуса 1.

Когда γ будет иметь одно из собственных значений (3.32), второе уравнение (3.31) примет вид

$$\frac{d^2 F_1}{dr^2} + \left[k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right] F_1 = 0. \quad (3.35)$$

Положим, что

$$F_1(r) = \sqrt{r} f(r), \quad u = kr; \quad (3.36)$$

тогда

$$\frac{d^2 f}{du^2} + \frac{1}{u} \frac{df}{du} + \left[1 - \frac{(n+1/2)^2}{u^2} \right] f = 0. \quad (3.37)$$

Это — уравнение Бесселя, и единственное решение этого уравнения, которое остается непрерывным для $r = 0$, есть функция Бесселя $J_{n+1/2}(u)$. В конечном итоге получаем как однозначное и непрерывное решение уравнения (3.26)

$$U = \sqrt{r} J_{n+\frac{1}{2}}(kr) \frac{\sin}{\cos} m\varphi P_n^m(\cos \theta) e^{ikct} \quad (n = 0, 1, 2, \dots; m \leq n). \quad (3.38)$$

При помощи выражений (3.27) и (3.28) тогда получаем для стоячих волн, возможных внутри шара, следующие формулы:

Электрический тип

$$\left. \begin{aligned} E_r &= k^2 \frac{n(n+1)}{(kr)^{3/2}} J_{n+1/2}(kr) \frac{\sin}{\cos} m\varphi P_n^m(\cos \theta) e^{ikct}, \\ E_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\sqrt{kr} J_{n+1/2}(kr) \right] \frac{\sin}{\cos} m\varphi \frac{\partial}{\partial \theta} P_n^m(\cos \theta) e^{ikct}, \\ E_\varphi &= \frac{m}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left[\sqrt{kr} J_{n+1/2}(kr) \right] \frac{\cos}{\sin} m\varphi P_n^m(\cos \theta) e^{ikct}, \\ H_r &= 0, \\ H_\theta &= i \frac{k^2 m}{\sqrt{kr} \sin \theta} J_{n+1/2}(kr) \frac{\cos}{-\sin} m\varphi P_n^m(\cos \theta) e^{ikct}, \\ H_\varphi &= -i \frac{k^2}{\sqrt{kr}} J_{n+1/2}(kr) \frac{\sin}{\cos} m\varphi \frac{\partial}{\partial \theta} P_n^m(\cos \theta) e^{ikct}. \end{aligned} \right\} (3.39)$$

Магнитный тип

$$\left. \begin{aligned}
 E_r &= 0, \\
 E_\theta &= i \frac{k^2 m}{\sqrt{kr} \sin \theta} J_{n+1/2}(kr) \frac{\cos}{\sin} m\varphi P_n^m(\cos \theta) e^{ikct}, \\
 E_\varphi &= -i \frac{k^2}{\sqrt{kr}} J_{n+1/2}(kr) \frac{\sin}{\cos} m\varphi \frac{\partial}{\partial \theta} P_n^m(\cos \theta) e^{ikct}, \\
 H_r &= -k^2 \frac{n(n+1)}{(kr)^{3/2}} J_{n+1/2}(kr) \frac{\sin}{\cos} m\varphi P_n^m(\cos \theta) e^{ikct}, \\
 H_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\sqrt{kr} J_{n+1/2}(kr) \right] \frac{\sin}{\cos} m\varphi \frac{\partial}{\partial \theta} P_n^m(\cos \theta) e^{ikct}, \\
 H_\varphi &= -\frac{m}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left[\sqrt{kr} J_{n+1/2}(kr) \right] \frac{\cos}{-\sin} m\varphi P_n^m(\cos \theta) e^{ikct}.
 \end{aligned} \right\} (3.40)$$

Теперь надо ввести граничные условия:

$$E_\varphi = E_\theta = 0 \quad \text{для } r = R. \quad (3.41)$$

Для стоячих волн электрического типа условия (3.41) дают

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\sqrt{kr} J_{n+1/2}(kr) \right] \right\}_{r=R} = 0. \quad (3.42)$$

Так как функции Бесселя связаны соотношением

$$x J_{p-1}(x) = x J'_p(x) + p J_p(x), \quad (3.43)$$

то (3.42) дает

$$\frac{J_{n+1/2}(kR)}{J_{n-1/2}(kR)} = \frac{kR}{n}. \quad (3.44)$$

Это трансцендентное уравнение имеет целую серию корней kR , которые мы обозначим $\gamma_1^{(n+1/2)}$, $\gamma_2^{(n+1/2)}$, ... Для k получаются следующие собственные значения:

$$k_{n,i} = \frac{\gamma_i^{(n+1/2)}}{R}. \quad (3.45)$$

Отсюда находятся собственные частоты сферического резонатора. Каждая стоячая волна соответствует трем целым числам (n, m, i) , но собственные частоты не зависят от m . Волны $E_{1,m,1}$ имеют наиболее низкую частоту, и так как мы имеем $\gamma_1^{(3/2)} = 2,74$, то легко видеть, что длина волны в пустоте, соответствующая этой частоте, равна $2\pi R / 2,74$ или $2,29R$.

Для стоячих волн магнитного типа условия (3.41) дают

$$J_{n+1/2}(kR) = 0. \quad (3.46)$$

Если обозначить через $\mu_i^{(m)}$ i -й не равный нулю корень J_m , то

$$k_{n,i} = \frac{\mu_i^{(n+1/2)}}{R}. \quad (3.47)$$

Отсюда видно, что собственные частоты не зависят от m . Волны $(1, m, 1)$ обладают наименьшей собственной частотой и, так как $\mu_1^{(3/2)} = 4,49$, то эта собственная частота соответствует длине волны в пустоте: $\lambda = \frac{2\pi R}{4,49} = 1,4 R$.

Могло бы казаться, что стоячие волны (3.39) и (3.40) — не единственно возможные, поскольку они зависят от выбора полярной оси, выбора произвольного. Если бы мы взяли вместо Oz другую полярную ось Oz' , то имели бы новые координаты φ' и θ' и получили бы другие стоячие волны, записанные формулами (3.39) и (3.40), в которых буквы φ и θ заменены через φ' и θ' . Но на самом деле каждая из новых стоячих волн, полученных таким образом, есть линейная комбинация прежних стоячих волн (3.39) и (3.40), причем коэффициенты этих комбинаций, естественно, зависят от поворота осей вокруг центра шара, приводящего от координат φ и θ к координатам φ' и θ' . Стоячие волны (3.39) и (3.40) образуют, следовательно, полную систему стоячих волн в том смысле, что всякая стоячая волна может быть представлена суперпозицией волн типа (3.39) и (3.40).

РАСЧЕТ ПОТЕРЬ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДАХ

1. Первый приближенный метод расчета потерь

До сих пор мы принимали, что металлические стенки, ограничивающие электрический волновод, — идеальные проводники. Отсюда следовало, что волны, распространение которых возможно вдоль волновода, распространяются без затухания. В действительности же проводимость стенок волновода всегда конечная, поэтому электромагнитные волны легко проникают в эти стенки и вызывают в них токи, благодаря чему происходят потери энергии на джоулево тепло. Так как эти потери происходят вдоль всей трубы, то волны ослабляются во время распространения; формулы, их выражающие, должны содержать множители вида $e^{-\gamma z} e^{i(kct - k_z z)}$, из которых один выражает распространение, а другой — затухание. Чтобы изучить такое распространение с затуханием, можно пользоваться двумя методами, из которых менее строгий метод приводит к более простым соотношениям. Мы начнем с этого наиболее часто употребляемого метода.

В этом методе мы пользуемся тем, что γ должна всегда быть очень малой по сравнению с k_z (без чего невозможно было бы распространение), и сохраняем для выражения полей те формулы, которые были получены в предположении, что стенки являются идеально проводящими. Этот шаг, конечно, не вполне логичен, так как прежде полученные решения соответствуют условиям, по которым на стенках волновода тангенциальная слагающая электрического поля исчезает, а нормальная к стенке составляющая вектора Пойнтинга всюду равна нулю, т. е. нет потока энергии изнутри волновода в толщу стенки и, следовательно, нет потерь на джоулево тепло в этой стенке, что противоречит принятому положению. Во втором, более точном методе учитывается факт, что у полей уже нет прежде изученной формы.

Принцип расчета потерь по первому методу следующий. Обозначим через W_m количество энергии, проходящее в среднем.

в единицу времени через поперечное сечение волновода. Это количество энергии легко найти, вычислив поток вектора Пойнтинга через это поперечное сечение. Так же как и вектор Пойнтинга, это количество будет квадратичной функцией полей и будет зависеть от z через множитель $e^{-2\gamma z}$. Следовательно, будем иметь

$$\frac{dW_m}{dz} = -2\gamma W_m. \quad (4.1)$$

Так как уменьшение W_m вызвано рассеянием энергии в стенках, что приводит к эффекту Джоуля, то если обозначить посредством $Q_m dz$ среднее значение джоулева тепла (выраженное в механических единицах), выделяющегося в единицу времени в части стенки длиной dz , имеем

$$\gamma = \frac{Q_m}{2W_m}. \quad (4.2)$$

Строго говоря, Q_m и W_m зависят от z , но мы принимаем, что они очень мало изменяются при изменении z . Наше приближение будет состоять в том, что мы пренебрегаем этим изменением и вычисляем Q_m и W_m , исходя из значения полей, вычисленных для случая идеально проводящих стенок. Несмотря на то, что в этих рассуждениях имеется как будто порочный круг, все же они приведут нас к достаточно точным результатам.

W_m вычисляется непосредственно с помощью вектора Пойнтинга. В некоторых случаях этим вычислениям смогут помешать лишь практические трудности интегрирования. Что касается Q_m , то для его расчета требуется знакомство с теорией проникновения волн в проводники. Изложению этой теории мы и посвятим следующий раздел.

2. Проникновение электромагнитных волн в проводники

Рассмотрим металлическое тело проницаемости μ и проводимости σ . Внутри металлического тела справедливо уравнение Максвелла¹⁾

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \text{rot } \mathbf{H} - \frac{4\pi \mathbf{i}}{c} = \text{rot } \mathbf{H} - \frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{E}. \quad (4.3)$$

¹⁾ Напомним, что \mathbf{E} , \mathbf{i} а следовательно, и σ выражены здесь в электро-статических единицах.

Если ограничиться рассмотрением гармонических электромагнитных волн, поля которых пропорциональны e^{ikt} , то можно написать:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon \mathbf{E}) = \text{rot } \mathbf{H}, \quad (4.4)$$

где введено обозначение

$$\varepsilon = 1 - i \frac{4\pi\sigma}{kc}. \quad (4.5)$$

Значит, все происходит так, как будто металл обладает комплексной диэлектрической постоянной, являющейся функцией частоты волны.

Предположим, что металлическое тело ограничено плоской поверхностью. Пусть плоская электромагнитная волна падает нормально на поверхность металла. Тогда проникание ее в металл будет следовать уравнению

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2}, \quad (4.6)$$

где ось z считается нормальной к плоскости металла. Так как в каждой точке мы имеем $\mathbf{i} = c\mathbf{E}$, то здесь

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{i}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{i}}{\partial z^2}. \quad (4.7)$$

Это уравнение определяет распределение тока, вызванного волной, в толщине металла.

Положим, что

$$\mathbf{i} = \mathbf{i}_0 e^{i(kct - k_z z)}, \quad (4.8)$$

где k_z — комплексная постоянная вида $k'_z + ik''_z$. Подставляя в (4.7), получаем

$$\mu\varepsilon k^2 = k_z^2 \quad (4.9)$$

и, отделяя действительную часть от мнимой,

$$\begin{aligned} \mu k^2 &= k_s'^2 - k_z''^2, \\ 2k'_z k_z'' &= \frac{4\pi\mu kc}{c}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Для хорошо проводящих металлов глубина проникновения очень мала¹⁾ по сравнению с длиной волны в пустоте $\lambda = \frac{2\pi}{k}$. Если для данного металла μ мало, то можно пренебречь величиной μk^2 по сравнению с $k_z''^2$ и, принять $k'_z = k''_z$. Тогда получается

$$k''_z = \sqrt{\frac{2\pi\mu kc}{c}} = \frac{2\pi}{c} \sqrt{\mu\nu\sigma}. \quad (4.11)$$

Рассмотрим в массе металла слой, параллельный поверхности. Пусть его длина в направлении векторов \mathbf{E} и \mathbf{i} будет L ; ширина l , а толщина dz . Его электрическое сопротивление будет $L/\sigma l dz$. Энергия, поглощаемая в этом слое в среднем за единицу времени равна

$$\overline{Ei} l L dz = \frac{|i_0|^2}{2\sigma} l L e^{-2k''_z z} dz. \quad (4.12)$$

Полную энергию, потерянную во всей толще в среднем за единицу времени, отнесенную к участку поверхности длины L и ширины l , получим по формуле

$$Q_m = \frac{|i_0|^2}{2} \frac{lL}{\sigma} \int_0^{+\infty} e^{-2k''_z z} dz = \frac{lL}{4\sigma k''_z} |i_0|^2. \quad (4.13)$$

Полная сила тока в части металла, соответствующей рассматриваемому участку, будет

$$I = \int_0^{\infty} il dz = i_0 l e^{ikct} \int_0^{\infty} e^{-(1+i)k''_z z} dz = \frac{i_0 l}{k''_z(1+i)} e^{ikct}, \quad (4.14)$$

откуда

$$|i_0|^2 = \frac{2k''_z{}^2}{l^2} |I|^2 \quad (4.15)$$

и, следовательно,

$$Q_m = \frac{L}{2\sigma l} k''_z |I|^2 = \frac{1}{2} \frac{2\pi L}{cl} \sqrt{\frac{\mu\nu}{\sigma}} |I|^2 = \frac{1}{2} r |I|^2, \quad (4.16)$$

где

$$r = \frac{2\pi L}{cl} \sqrt{\frac{\mu\nu}{\sigma}}. \quad (4.17)$$

Формула (4.17) выведена Кельвином. Она дает возможность вычислять Q_m , если мы допустим, что ее можно применить к стенке

¹⁾ Это справедливо во всяком случае для всех электромагнитных волн длиной более 1 сантиметра.

волновода, даже в общем случае, когда эта стенка не плоская, что является еще одним приближенным допущением.

Формулы, выражающие величину потерь, будут, конечно, различными, в зависимости от типа рассматриваемого волновода. Выведем эти формулы только для цилиндрического волновода, наиболее важного для практических целей.

3. Расчет затухания волны (E_0) в цилиндрическом волноводе

Мы всегда будем считать, что внутри волновода $\epsilon = \mu = 1$. Впрочем, Клавье показал, что если заполнить волновод диэлектриком, то потери, обусловленные диэлектрическим гистерезисом, значительно больше, чем потери в стенках на Джоулево тепло, так что никогда не представляет интереса заполнять волновод диэлектриком.

Для вычисления W_m для волны (E_0) воспользуемся формулами (2.31), которые умножим на константу C_0/α^2 , представляющую интенсивность возбуждения волны. Вычисляя тогда поток вектора Пойнтинга через нормальное сечение волновода, получим

$$W_m = \frac{c}{16\pi} \int_0^R (E_p^* H_\varphi - E_\varphi H_p^*) 2\pi\rho d\rho = \frac{kk_2}{4\alpha^2} |C_0|^2 c \int_0^R J_1^2(\alpha\rho) \rho d\rho, \quad (4.18)$$

принимая во внимание, что

$$J_1(x) = -\frac{dJ_0}{dx}, \quad (4.19)$$

а, согласно граничному условию $J_0(\alpha R) = 0$, получаем

$$\int_0^R J_1^2(\alpha\rho) \rho d\rho = \frac{R^2}{2} J_1^2(\alpha R), \quad (4.20)$$

откуда для W_m следует формула

$$W_m = \frac{kk_2 C}{8\alpha^2} |C_0|^2 R^2 J_1^2(\alpha R), \quad (4.21)$$

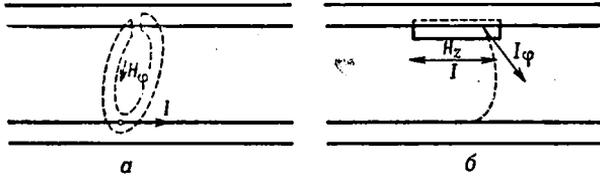
где α имеет одно из дискретных значений $\mu_l^{(m)}/R$.

Ток I течет вдоль образующей стенки и выражается формулой

$$\frac{4\pi}{c} I_z = 2\pi R H_\varphi(R), \quad (4.22)$$

которую легко вывести, рассматривая фиг. 6, а и применяя закон Ампера к указанной окружности, причем поле \mathbf{H} внутри стенки считается равным нулю. Следовательно, мы имеем

$$I_z = \frac{Rc}{2} H_\varphi(R) = -i \frac{kRc}{2\epsilon} C_0 J_1(\alpha R) e^{i(kct - k_z z)}. \quad (4.23)$$



Фиг. 6.

Полагая в формуле (4.17) $L = 1$ и $l = 2\pi R$, получим¹⁾

$$r = \frac{1}{cR} \sqrt{\frac{\mu\nu}{\sigma}} \quad (4.24)$$

и, следовательно,

$$Q_m = \frac{1}{2} r |I_z|^2 = \frac{Rc}{8} \sqrt{\frac{\mu\nu}{\sigma}} \frac{k^2}{a^2} |C_0|^2 J_1^2(\alpha R), \quad (4.25)$$

откуда, наконец,

$$\gamma_{E_0} = \frac{Q_m}{2W_m} = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{\mu\nu}{\sigma}} \frac{k}{k_z} = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{\mu c}{2\pi\sigma}} \frac{k^{3/2}}{\sqrt{k^2 - \frac{\mu_i'^2}{R^2}}}. \quad (4.26)$$

Приравнявая $d\gamma_{E_0}/dk$ нулю, находим минимум γ_{E_0} при $k = \sqrt{3} \frac{\mu_i^{(m)}}{R}$. Соответствующие значения γ_{E_0} имеют форму $\text{const} \cdot \frac{\sqrt{k}}{R}$. Мы получим наименьший минимум γ_{E_0} , принимая

$$k = \sqrt{3} \frac{\mu_i^{(0)}}{R} = 2,4 \frac{\sqrt{3}}{R}. \quad (4.27)$$

Этой частоте соответствует длина волны в пустоте

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \approx 1,5 R. \quad (4.28)$$

¹⁾ Здесь μ — магнитная проницаемость стенки.

4. Расчет затухания для волны (H_0) в цилиндрическом волноводе

Значительный интерес представляет расчет затухания для волны (H_0). Это волна особого характера, что мы уже отмечали выше; кроме того, это единственная волна, обладающая следующим свойством: ее затухание уменьшается, когда увеличивается частота. Такая особенность могла бы иметь интересные технические применения.

Беря за основу вывода формулы (2.32), мы получим ту же формулу (4.18), но теперь $J_1(\alpha R) = -J'_0(\alpha R)$, а J'_0 обращается в нуль на стенке. Расчет интеграла (4.18) приводит к значению

$$\int_0^R J_1^2(\alpha \rho) \rho d\rho = \frac{R^2}{2} J_0^2(\alpha R) \quad (4.29)$$

вместо (4.20). Соответственно, (4.21) перейдет в

$$W_m = c \frac{kk_z R^2}{8z^2} |C_0|^2 J_0^2(\alpha R). \quad (4.30)$$

В стенке мы имеем круговой ток и, применяя закон Ампера к указанной на фиг. 6, b окружности, находим

$$I_\varphi = \frac{c}{4\pi} H_z = \frac{cC_0}{4\pi} J_0(\alpha R) e^{i(kct - kz z)}. \quad (4.31)$$

Этот ток I_φ не зависит от частоты, в противоположность тому, что имело место для тока I_z , рассмотренного в предыдущем разделе.

Принимая в формуле (4.17) $L = 2\pi R$ и $l = 1$, получаем

$$r = \frac{4\pi^2}{c} R \sqrt{\frac{\mu\nu}{\sigma}}, \quad (4.32)$$

откуда

$$Q_m = \frac{r}{2} |I_\varphi|^2 = \frac{|C_0|^2 R c}{8} \sqrt{\frac{\mu\nu}{\sigma}} J_0^2(\alpha R) \quad (4.33)$$

и, следовательно,

$$\Upsilon_{H_0} = \frac{Q_m}{2W_m} = \frac{\alpha^2}{2kk_z} \frac{1}{R} \sqrt{\frac{\mu\nu}{\sigma}} = \frac{\alpha^2}{2R} \sqrt{\frac{\mu c}{2\pi\sigma}} \frac{1}{\sqrt{k k_z}} = \frac{\text{const}}{\sqrt{k(k^2 - \alpha^2)}} \quad (4.34)$$

Для данного собственного значения α величина Υ_{H_0} уменьшается с частотой, что и является особенностью характера волны (H_0).

Этот результат, как впервые отметил Щелкунов, можно толковать следующим образом. Волна (H_0) — единственная, имеющая компоненту H_z и не имеющая компоненты H_φ [см. формулу (2.32)]. Она единственная, для которой ток в стенке имеет лишь одну компоненту I_φ , создаваемую действием H_z . Но при возрастании k компонента H_z всегда стремится к нулю по сравнению с другими составляющими поля; это легко объясняется, потому что при уменьшении λ поперечные размеры волновода, измеренные в длинах волны, становятся очень большими и волна, распространяющаяся в пространстве, которое для нее квази-бесконечно, стремится стать поперечной, как при свободном распространении. Это относительное уменьшение H_z , когда увеличивается k , и объясняет, почему для (H_0) и только для (H_0) затухание уменьшается при увеличении частоты.

5. Расчет затухания для волны (H_1) в цилиндрическом волноводе

Клавье дал также расчет затухания для волны (H_1), более сложный, чем предыдущие.

Прежде всего, мы имеем

$$\begin{aligned}
 W_m &= \frac{c}{16\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R [E_\rho H_\varphi^* - E_\varphi H_\rho^* + \text{сопряженное}] \rho d\rho = \\
 &= \frac{ck_z}{8\pi k} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R [|E_\rho|^2 + |E_\varphi|^2] \rho d\rho.
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

Члены E_i^2 содержат множители вида $\frac{\sin^2 m\varphi}{\cos^2 m\varphi}$, дающие $1/2$ при усреднении. Следовательно,

$$W_m = \frac{kk_z c}{8\alpha^2} |C_1|^2 \int_0^R \left[\frac{1}{\alpha^2 \rho^2} J_1^2(\alpha\rho) + J_1'^2(\alpha\rho) \right] \rho d\rho. \tag{4.36}$$

Интеграл равен $\frac{R^2}{2} \left(1 - \frac{1}{\alpha^2 R^2} \right) J_1^2(\alpha R)$ и, следовательно,

$$W_m = \frac{|C_1|^2 J_1^2(\alpha R)}{16} \frac{kk_z c}{\alpha^2} R^2 \left(1 - \frac{1}{\alpha^2 R^2} \right). \tag{4.37}$$

Электрический ток в стенке имеет составляющие

$$\left. \begin{aligned} I_\varphi &= \frac{c}{4\pi} H_z = \frac{C_1 c J_1(\alpha R)}{4\pi} \cos \varphi e^{i(kct - k_z z)}, \\ I_z &= c \frac{R}{2} H_\varphi = \frac{ik_z C_1}{2\alpha^2} c J_1(\alpha R) \sin \varphi e^{i(kct - k_z z)}. \end{aligned} \right\} \quad (4.38)$$

Соответствующие действительные средние значения

$$\left. \begin{aligned} (I_\varphi)_{\text{eff}}^2 &= \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |I_\varphi|^2 d\varphi = c^2 \frac{|C_1|^2}{64\pi^2} J_1^2(\alpha R), \\ (I_z)_{\text{eff}}^2 &= \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |I_z|^2 d\varphi = \frac{c^2 k_z^2 |C_1|^2}{16\alpha^4} J_1^2(\alpha R). \end{aligned} \right\} \quad (4.39)$$

По формуле (4.17) для сопротивлений получаем

$$r_\varphi = \frac{4\pi^2}{c} R \sqrt{\frac{\mu\nu}{\sigma}}, \quad r_z = \frac{1}{Rc} \sqrt{\frac{\mu\nu}{\sigma}}, \quad (4.40)$$

откуда для потерь в стенках на единицу длины получаем выражение

$$Q_m = r_\varphi (I_\varphi)_{\text{eff}}^2 + r_z (I_z)_{\text{eff}}^2 = \frac{|C_1|^2}{16} J_1^2(\alpha R) \sqrt{\frac{\mu\nu}{\sigma}} Rc \left(1 + \frac{k_z^2}{\alpha^4 R^2}\right), \quad (4.41)$$

а для коэффициента затухания

$$\gamma_{H_1} = \frac{Q_m}{2W_m} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu\nu}{\sigma}} \frac{\alpha^3}{kk_z} \frac{1}{R} \left(\frac{1 + \frac{k_z^2}{\alpha^4 R^2}}{1 - \frac{1}{\alpha^2 R^2}} \right). \quad (4.42)$$

Заменяя k_z через $\sqrt{k^2 - \alpha^2}$, где α имеет одно из своих собственных значений, получаем:

$$\gamma_{H_1} = \frac{A}{\sqrt{k(k^2 - \alpha^2)}} + B \sqrt{\frac{k^2 - \alpha^2}{k}}. \quad (4.43)$$

Первый член, уменьшающийся с k , происходит от I_φ и H_z ; второй, который увеличивается с k и становится основным для очень большого k , происходит от I_z и H_φ . Вследствие наличия этого последнего члена волна (H_1) не обладает особенностью, присущей волне (H_0). Коэффициент γ_{H_1} , являясь функцией k , обладает очень пологим минимумом.

6. Второй метод расчета затухания

Изложенный выше метод не вполне логичен, так как он находится в противоречии, как мы указали в начале нашего изложения, с применением теоремы Пойнтинга. Изложим теперь второй, более точный метод, который учитывает необходимость изменения формы полей благодаря конечной проводимости стенки и описывает проникновение волны в эту стенку. Применим этот второй метод для частного случая цилиндрического волновода, хотя он в принципе является столь же общим, как и первый.

Мы всегда будем считать, что внутри волновода $\epsilon = \mu = 1$. В стенке μ имеет известное заданное значение, а ϵ имеет значение (4.5), где σ — проводимость металла стенки. Вследствие потерь волна, распространяющаяся в волноводе, будет характеризоваться множителем $e^{-ik_z z}$, но со значением k_z , отличным от значения k_z^0 , соответствующего случаю идеально проводящих стенок. А именно

$$k_z = k_z^0 + \delta k_z - i\gamma. \quad (4.44)$$

Предположим, что δk_z и γ очень малы по сравнению с k_z^0 . Введем обозначения:

$$\alpha = \sqrt{k^2 - k_z^2}, \quad \alpha_0 = \frac{\mu i}{R} = \sqrt{k^2 - k_z^{02}}, \quad (4.45)$$

откуда приближенно

$$\alpha = \alpha_0 + \delta\alpha \approx \alpha_0 - \frac{k_z^0}{\alpha_0} (\delta k_z - i\gamma). \quad (4.46)$$

В стенке должна существовать волна, которая, чтобы отвечать волне внутри волновода, должна иметь множитель

$$e^{\frac{ik'ct}{\sqrt{\mu\epsilon}}} e^{-ik_z z} = e^{-i(k_z^0 + \delta k_z)z} e^{-\gamma z} e^{ikct} \quad \left(k = \frac{k'}{\sqrt{\mu\epsilon}} \right). \quad (4.47)$$

В стенке аргумент решения уравнения Бесселя, фигурирующий в выражении полей, должен иметь вид $\alpha' \rho$, где

$$\begin{aligned} \alpha' &= \sqrt{k'^2 - k_z^2} = \sqrt{k^2 \epsilon \mu - k_z^2} \approx k \sqrt{-\frac{4\pi\mu\sigma}{kc} i} = \\ &= \sqrt{\frac{2\pi k \mu \sigma}{c}} (1 - i), \end{aligned} \quad (4.48)$$

что является весьма хорошим приближением ввиду большого значения, приписываемого σ [см. значение (4.5) для ϵ].

Теперь нас ничто не обязывает принять в качестве решения уравнения Бесселя, функцию Бесселя J_m для выражения полей в стенках [см. формулы (2.31) и (2.32)], так как точки $\rho = 0$ оси волновода не находятся в стенке. С физической точки зрения мы видим, что надо, напротив, выбрать решение уравнения Бесселя, представляющее расходящуюся цилиндрическую волну, абсорбирующуюся в толще стенки. Нам хорошо известно решение уравнения Бесселя, обладающее этой особенностью: это вторая функция Ханкеля, определение которой дается с помощью функций Бесселя и Неймана формулой

$$H_m^{(2)}(u) = J_m(u) - iN_m(u). \quad (4.49)$$

Следовательно, мы должны для выражения полей внутри стенок употреблять функцию $H_m^{(2)}(\alpha'\rho)$. Напомним, что асимптотическая форма $H_m^{(2)}(\alpha'\rho)$ для больших значений аргумента $\alpha'\rho$ имеет вид:

$$H_m^{(2)}(\alpha'\rho) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha'\rho}} e^{-i(\alpha'\rho - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \quad (\alpha'\rho \gg 1). \quad (4.50)$$

Эта формула нам в дальнейшем будет очень полезна.

Образовав таким образом выражения для электромагнитных полей в волноводе и в стенке волновода, нам необходимо еще удовлетворить известную теорему электромагнитной теории, требующую непрерывности тангенциальных составляющих полей и нормальных составляющих индукций на границе волновода и стенок. Таким образом, для напряженности волны в стенке получаем значения, которые будут совместимы с выражением волны внутри волновода только при соблюдении известного условия. Это комплексное условие дает возможность в принципе определить две действительные константы δk_z и γ , а следовательно, определить и затухание.

Произведем подсчет для волн (E_0) и (H_0) и покажем, что мы снова найдем в первом приближении результаты, полученные первым методом. Для волн (E_m) и (H_m) с $m \gg 1$ этот второй метод подведет к сложным расчетам, которые мы не будем приводить, довольствуясь лишь тем, что дадим о нем в разделе 9 общее представление.

7. Расчет затухания волны (E_0) в цилиндрическом волноводе вторым методом

Чтобы произвести этот расчет, сначала рассмотрим волны внутри волновода. Внутри волновода ($\varepsilon = \mu = 1$)

$$E_z = J_0(\alpha \rho) e^{i(kct - k_z z)}, \quad E_\rho = \frac{ik_z}{\alpha'} J_1(\alpha \rho) \cdot P,$$

$$H_\varphi = -\frac{k}{k_z} E_\rho, \quad (4.51)$$

тогда как остальные составляющие поля равны нулю.

Допустим, что в стенке:

$$E_z = AH_0^{(2)}(\alpha' \rho) \cdot P, \quad E_\rho = \frac{ik_z}{\alpha'} AH_1^{(2)}(\alpha' \rho) \cdot P,$$

$$H_\varphi = -\varepsilon \frac{k}{k_z} E_\rho = -\frac{k}{k_z} D_\rho, \quad (4.52)$$

со значениями (4.46) и (4.48) для α и α' .

Если мы запишем условия непрерывности на поверхности стенки для E_z , H_φ и D_ρ , то получим два независимых условия

$$J_0(\alpha R) = AH_0^{(2)}(\alpha' R), \quad \frac{1}{\alpha} J_1(\alpha R) = \frac{\varepsilon}{\alpha'} AH_1^{(2)}(\alpha' R). \quad (4.53)$$

Из этих условий следует:

$$\alpha \frac{J_0(\alpha R)}{J_1(\alpha R)} = \frac{\alpha'}{\varepsilon} \frac{H_0^{(2)}(\alpha' R)}{H_1^{(2)}(\alpha' R)}. \quad (4.54)$$

Но приближенно выполняется соотношение

$$J_0(\alpha R) \approx J_0(\alpha_0 R) + \left[\frac{dJ_0(\alpha R)}{d(\alpha R)} \right]_{\alpha=\alpha_0} (\alpha - \alpha_0) R =$$

$$= J_1(\alpha R) \frac{k_z^0 R}{\alpha} (\delta k_z - i\gamma). \quad (4.55)$$

Поэтому (4.54) можно записать в следующей форме:

$$Rk_z^0 (\delta k_z - i\gamma) = \frac{\alpha'}{\varepsilon} \frac{H_0^{(2)}(\alpha' R)}{H_1^{(2)}(\alpha' R)} \approx \frac{1-i}{-i} \frac{\sqrt{\frac{2\pi k \mu \sigma}{c}}}{\frac{4\pi \sigma}{kc}} \frac{H_0^{(2)}}{H_1^{(2)}} =$$

$$= k \sqrt{\frac{\mu kc}{8\pi \sigma}} (1+i) \frac{H_0^{(2)}(\alpha' R)}{H_1^{(2)}(\alpha' R)}. \quad (4.56)$$

Из асимптотической формы функции Ханкеля (4.50) видим, что можно приближенно принять (так как $\alpha'R \gg 1$):

$$\frac{H_0^{(2)}(\alpha'R)}{H_1^{(2)}(\alpha'R)} = \frac{1}{e^{i\pi/2}} = -i, \quad (4.57)$$

откуда

$$Rk_z^0(\delta k_z - i\gamma) = \frac{k}{2} \sqrt{\frac{\mu\nu}{\sigma}} (1 - i). \quad (4.58)$$

Отделяя действительную часть от мнимой, получаем

$$\delta k_z = \frac{k}{k_z^0} \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{\mu\nu}{\sigma}}, \quad \gamma_{E_0} = \frac{k}{k_z^0} \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{\mu\nu}{\sigma}}. \quad (4.59)$$

Таким образом, мы снова находим значение γ_{E_0} , полученное предыдущим методом [формула (4.26)].

8. Расчет затухания волны (H_0) в цилиндрическом волноводе вторым методом

Для этого расчета допустим, что в волноводе имеем

$$H_z = J_0(\alpha\rho) e^{i(ckt - k_z z)}, \quad H_\rho = \frac{ik_z}{\alpha} J_1(\alpha\rho) \cdot P, \\ E_\varphi = \frac{k}{k_z} H_\rho, \quad (4.60)$$

тогда как остальные составляющие поля равны нулю.

В стенке надо принять

$$H_z = AH_0^{(2)}(\alpha'\rho) \cdot P, \quad H_\rho = \frac{ik_z}{\alpha'} AH_1^{(2)}(\alpha'\rho) \cdot P, \\ E_\varphi = \mu \frac{k}{k_z} H_\rho = \frac{k}{k_z} B_\rho. \quad (4.61)$$

Непрерывность составляющих H_z , E_φ и B_ρ на поверхности стенки дает нам два независимых условия

$$J_0(\alpha R) = AH_0^{(2)}(\alpha'R), \quad \frac{1}{\alpha} J_1(\alpha R) = \mu \frac{A}{\alpha'} H_1^{(2)}(\alpha'R), \quad (4.62)$$

откуда следует условие совместности

$$\alpha \frac{J_0(\alpha R)}{J_1(\alpha R)} = \frac{\alpha'}{\mu} \frac{H_0^{(2)}(\alpha'R)}{H_1^{(2)}(\alpha'R)}. \quad (4.63)$$

Пользуясь формулами (4.48) и (4.60), легко найдем для второго члена (4.63) приближенное значение $\sqrt{\frac{2\pi k\sigma}{\mu\epsilon}}(1-i)$. Остается вычислить первый член формулы (4.63); но здесь $J_1(\alpha_0 R)$ обращается в нуль, а не $J_0(\alpha_0 R)$. Следовательно, напишем

$$\begin{aligned} J_1(\alpha R) &\approx J_1(\alpha_0 R) + \left[\frac{dJ_1(\alpha R)}{d(\alpha R)} \right]_{\alpha=\alpha_0} R(\alpha - \alpha_0) = \\ &= -\frac{k_z^0 R}{\alpha} \left[\frac{dJ_1(\alpha R)}{d(\alpha R)} \right]_{\alpha=\alpha_0} (\delta k_z - i\gamma), \end{aligned} \quad (4.64)$$

В то же время формула (3.43) (полагая $p=1$ и $x=\alpha_0 R$) нам дает

$$J_0(\alpha_0 R) = \left[\frac{dJ_1(\alpha R)}{d(\alpha R)} \right]_{\alpha=\alpha_0}, \quad (4.65)$$

следовательно,

$$J_1(\alpha R) \approx -\frac{k_z^0 R}{\alpha} J_0(\alpha_0 R) (\delta k_z - i\gamma), \quad (4.66)$$

так что условие (4.63) принимает вид

$$-\frac{\alpha^2}{k_z^0 R} = \sqrt{\frac{2\pi k\sigma}{\mu\epsilon}} (1-i) (\delta k_z - i\gamma), \quad (4.67)$$

откуда легко получить

$$\delta k_z = -\frac{\alpha^2}{2k_z^0 R} \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2\pi k\sigma}}, \quad \gamma_{H_0} = \frac{\alpha^2}{2k_z^0 R} \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2\pi k\sigma}} = \frac{\alpha^2}{2R} \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2\pi\sigma}} \frac{1}{\sqrt{kk_z}} \quad (4.68)$$

Значение (4.68) для γ_{H_0} хорошо совпадает со значением (4.34), полученным нами первым способом и показывающим уменьшение потерь при увеличении частоты.

9. Новые результаты для волн с индексами выше нуля¹⁾

Если мы попытаемся продолжать применять второй метод для волн с индексами выше нуля, то встретимся с несколько неожиданной разницей по сравнению с предыдущими результатами. Для этих волн составляющие E_φ и H_φ обе отличны

¹⁾ Результаты, изложенные в этом разделе, были сообщены автору Морисом Кот.

от нуля, так же как и одна из составляющих E_z или H_z . Если мы запишем условия непрерывности тангенциальных составляющих, то получим три независимых условия, тогда как непрерывность нормальных составляющих индукций, как и раньше, не дает нового независимого условия. Но для каждой волны (E_m) и (H_m) мы располагаем только одной константой A , аналогичной употребленной в последних двух разделах. Эта константа должна была бы удовлетворить трем независимым уравнениям. Теперь уже нельзя ограничиться требованием, аналогичным (4.54) или (4.63), и проблема кажется неразрешимой.

На примере волны (E_1) покажем, что противоречия здесь нет. Приходится предположить, что конечная проводимость стенки вызывает незначительное изменение волны (E_1), обуславливая появление в ней небольшой продольной составляющей H_z ; это эквивалентно тому, что для удовлетворения условиям на стенке необходимо рассматривать распространение в волноводе волны (E'_1), электрического типа, очень немного отличающейся от (E_1), и очень слабой волны магнитного типа (H'_1). Суперпозиция двух волн (E'_1) и (H'_1) характеризуется комплексной константой B , представляющей отношение амплитуд и разность фаз обеих волн в суперпозиции. Волна (H'_1) соответствует тем же значениям α и k_z , как и (E'_1); следовательно, она очень отличается от (H_1). Непрерывность четырех тангенциальных составляющих E_φ , H_φ , E_z и H_z на поверхности стенки дают нам четыре условия. Эти четыре условия содержат константу B и обе константы типа A , относящиеся к двум волнам (E'_1) и (H'_1); следовательно, их можно сделать совместными, потребовав удовлетворения соотношения, аналогичного (4.54), соотношения, определяющего k_z , а следовательно, и коэффициент затухания γ . Подобные рассуждения действительны для всех волн (E_m) [или (H_m)] с индексами выше нуля. Не развивая расчета, мы видим, что вследствие конечной проводимости стенки эти волны (E_m) [или (H_m)] перестают, строго говоря, принадлежать к электрическому типу (или к магнитному типу); следствием конечной проводимости стенки является создание как бы смеси этих двух типов волн. Этот интересный результат нельзя было, конечно, получить, применяя для расчета потерь первый метод.

10. Теория диэлектрического волновода

Дополним изложенные выше расчеты теорией диэлектрического волновода. По определению, диэлектрическим волноводом будем называть цилиндрический стержень круглого сечения радиусом R , состоящий из вещества с диэлектрической постоянной ϵ_1 , погруженной в бесконечную среду с диэлектрической постоянной ϵ_2 . Будем считать волновод и среду немагнитными ($\mu_1 = \mu_2 = 1$). Часто внешней средой является воздух, и можно считать $\epsilon_2 = 1$, но для большей общности мы не будем этого предполагать.

Чтобы волна могла распространяться по диэлектрическому волноводу, практически необходимо, чтобы было полное отражение на поверхности волновода, без чего затухание, благодаря частичному прониканию волны в эту внешнюю среду, будет настолько сильным, что невозможно существование в волноводе настоящей бегущей волны. Следовательно, надо чтобы электромагнитная волна, проникая во внешнюю среду, затухала в ней.

Займемся изучением распространения волны типа (E_0) в диэлектрическом волноводе, проводя расчет более или менее аналогично проведенному в последних разделах, но с той разницей, что $\sigma = 0$. В волноводе мы будем иметь:

$$E_z = J_0(\alpha_1 \rho) e^{i(kct - k_z z)}, \quad E_\rho = \frac{ik_z}{\alpha_1} J_1(\alpha_1 \rho) \cdot P, \quad H_\varphi = -\frac{k\epsilon_1}{k_z} E_\rho, \quad (4.69)$$

где

$$\alpha_1 = \sqrt{k^2 \epsilon_1 - k_z^2}. \quad (4.70)$$

Во внешней среде мы возьмем:

$$E_z = AH_0^{(2)}(\alpha_2 \rho) \cdot P, \quad E_\rho = \frac{ik_z}{\alpha_2} AH_1^{(2)}(\alpha_2 \rho) \cdot P, \\ H_\varphi = -\frac{k\epsilon_2}{k_z} E_\rho, \quad (4.71)$$

где

$$\alpha_2 = \sqrt{k^2 \epsilon_2 - k_z^2}. \quad (4.72)$$

Непрерывность составляющих E_z , H_φ и D_ρ на поверхности волновода дает два независимых условия:

$$J_0(\alpha_1 R) = AH_0^{(2)}(\alpha_2 R), \quad \frac{\epsilon_1}{\alpha_1} J_1(\alpha_1 R) = \frac{\epsilon_2}{\alpha_2} AH_1^{(2)}(\alpha_2 R), \quad (4.73)$$

откуда следует условие совместности

$$\frac{\alpha_1 J_0(\alpha_1 R)}{\varepsilon_1 J_1(\alpha_1 R)} = \frac{\alpha_2 H_0^{(2)}(\alpha_2 R)}{\varepsilon_2 H_1^{(2)}(\alpha_2 R)}. \quad (4.74)$$

Чтобы волна, выходящая во внешнюю среду, была затухающей, надо, чтобы аргумент $\alpha_2 R$ функции Ханкеля был чисто мнимым. Пусть тогда p и iq будут значениями $\alpha_1 R$ и $\alpha_2 R$ соответственно такими, чтобы условие (4.74) было удовлетворено, причем p и q — действительные числа. Мы имеем

$$k_z = \sqrt{k^2 \varepsilon_1 - \alpha_1^2} = \sqrt{k^2 \varepsilon_2 - \alpha_2^2}, \quad (4.75)$$

и эти условия нам дают

$$k_z = \sqrt{k^2 \varepsilon_2 + \frac{q^2}{R^2}}, \quad k = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{p^2 + q^2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}}. \quad (4.76)$$

Так как k — действительное число, то должно быть

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2, \quad (4.77)$$

—неравенство, всегда справедливое для диэлектрического волновода, погруженного в воздух. Фазовая скорость распространения равна:

$$V = c \frac{k}{k_z} = c \sqrt{\frac{p^2 + q^2}{\varepsilon_1 q^2 + \varepsilon_2 p^2}}. \quad (4.78)$$

[Уравнение (4.74) дает зависимость волнового числа k_z различных волн, могущих распространяться вдоль диэлектрического волновода, от частоты и параметров линии. Исследование этого уравнения показывает, что для каждой волны существует критическая частота. Если частота данной волны ниже критической частоты, то распространение этой волны вдоль диэлектрического волновода невозможно. В отличие от волноводов с металлическими стенками, при уменьшении частоты до критической фазовая скорость волны остается ограниченной. Кроме того, уравнение (4.74) может быть удовлетворено только вещественными k_z , так что при частоте ниже критической не только распространение, но и существование данной волны невозможно. Если частота стремится к критической со стороны больших значений, то q стремится к нулю, и фазовая скорость стремится к $c / \sqrt{\varepsilon_2}$. При этом поле весьма медленно затухает при удалении от цилиндра. С ростом частоты q неограниченно растет,

ρ стремится к конечному пределу, различному для разных волн. При этом поле концентрируется внутри цилиндра и в непосредственной близости к нему, и фазовая скорость близка к $c/\sqrt{\epsilon_1}$.

В общем случае фазовая скорость V удовлетворяет неравенству $\frac{c}{\sqrt{\epsilon_1}} < V < \frac{c}{\sqrt{\epsilon_2}}$ (мы считаем $\epsilon_1 > \epsilon_2$).

Соображения, приведенные в разделе 9, позволяют ожидать, что несимметричные волны, распространяющиеся вдоль диэлектрических волноводов, должны иметь более сложную структуру полей, нежели рассмотренные до сих пор волны. Для них, как и для волн в волноводе с неидеально проводящими стенками, невозможно произвести строгое разбиение на E - и H -волны. Поля несимметричных волн содержат как E_z , так и H_z , и поэтому число произвольных постоянных увеличивается.

Внутри стержня, т. е. при $\rho < R$

$$\left. \begin{aligned} E_z &= A \cos n\varphi J_n(\alpha_1\rho) \cdot P, \\ H_z &= B \sin n\varphi J_n(\alpha_1\rho) \cdot P, \\ E_\varphi &= \left[-\frac{ik_z}{\alpha_1} A J_n'(\alpha_1\rho) - \frac{ik_n}{\rho\alpha_1^2} B J_n(\alpha_1\rho) \right] \cos n\varphi \cdot P, \\ E_\rho &= \left[\frac{ik_z n}{\alpha_1^2 \rho} A J_n(\alpha_1\rho) + \frac{ik}{\alpha_1} B J_n'(\alpha_1\rho) \right] \sin n\varphi \cdot P, \\ H_\varphi &= \left[-\frac{ik\epsilon_1 n}{\alpha_1^2 \rho} A J_n(\alpha_1\rho) - \frac{ik_z}{\alpha_1} B J_n'(\alpha_1\rho) \right] \sin n\varphi \cdot P, \\ H_\rho &= \left[-\frac{ik\epsilon_1}{\alpha_1} A J_n(\alpha_1\rho) - \frac{ik_z \cdot n}{\alpha_1^2 \rho} B J_n(\alpha_1\rho) \right] \cos n\varphi \cdot P. \end{aligned} \right\} (4.79)$$

Здесь штрих означает производную по всему аргументу. Для полей во внешнем пространстве можно написать аналогичные выражения, заменяя J_n на $H_n^{(2)}$, α_1 на α_2 , ϵ_1 на ϵ_2 и вводя вместо A и B постоянные C и D . Граничные условия при $\rho = R$ дадут четыре независимых линейных однородных уравнения для A , B , C и D , условие совместности которых запишется в виде

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{J_n'(\rho)}{J_n(\rho)} - \frac{1}{iq} \frac{H_n^{(2)'}(iq)}{H_n^{(2)}(iq)} \right] \left[\frac{\epsilon_1}{\rho} \frac{J_n'(\rho)}{J_n(\rho)} - \frac{\epsilon_2}{iq} \frac{H_n^{(2)'}(iq)}{H_n^{(2)}(iq)} \right] = n^2 \frac{k_z^2}{k^2} \left[\frac{1}{q^2} + \frac{1}{\rho^2} \right]^2. \quad (4.80)$$

Исследование этого уравнения показывает, что для несимметричных волн имеют место качественно те же закономерности,

что и для симметричных (см. выше). Важным исключением, однако, является волна, соответствующая случаю $n=1$ и наибольшему значению k_z , удовлетворяющему уравнению (4.80). Для этой волны не существует критической частоты или, что то же самое, критическая частота равна нулю, т. е. волна может распространяться вдоль диэлектрической системы при любых частотах. При низких частотах это—единственно возможная волна, и трансцендентное уравнение (4.80) для нее упрощается к виду:

$$k^2 R^2 \ln \frac{\gamma q}{2} = -\frac{\epsilon_1 + 1}{\epsilon_1 - 1} + k^2 R^2 \frac{\epsilon_1 + 1}{8}, \quad (4.81)$$

где $\gamma = 1,78 \dots$ (мы положили здесь $\epsilon_2 = 1$). Из уравнения (4.81) видно, что q мало и скорость распространения этой волны близка к скорости распространения волн в свободном пространстве.

Волны, соответствующие случаю $n=1$, могут быть возбуждены в диэлектрическом стержне, например, с помощью диполя, расположенного [внутри стержня перпендикулярно его оси]¹⁾.

¹⁾ Текст в квадратных скобках является дополнением редактора.

ПРИНЦИП ГЮЙГЕНСА и ДИФФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ВЫХОДЕ ВОЛНОВОДОВ И РУПОРОВ

1. Применение формулы Кирхгофа к электромагнитным волнам

Как известно, Кирхгоф дал точную математическую формулировку принципа Гюйгенса. Его формулы служат базой в оптических исследованиях, посвященных изучению явлений диффракции.

Обычно применяют теорию Кирхгофа, допуская, что свет можно представить при помощи скалярной функции $u(x, y, z, t)$. Таким образом, оставляют без внимания векторный и электромагнитный характер излучения. Отправной точкой исследования служит требование, чтобы функция u удовлетворяла уравнению распространения:

$$\Delta u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (5.1)$$

если волна — монохроматическая, частоты $kc/2\pi$, то можно написать:

$$\Delta u + k^2 u = 0. \quad (5.2)$$

Доказательство формулы Кирхгофа основано на применении хорошо известной формулы Грина. Если U и V — две функции, непрерывные вместе с их первыми и вторыми производными внутри области D , ограниченной поверхностью S , то формула Грина, как известно, имеет вид:

$$\iiint_D (U \Delta V - V \Delta U) d\tau = \iint_S \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) d\sigma, \quad (5.3)$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ представляет производную, взятую по нормали к поверхности S , направленной наружу из области D . Внутри области D фиксируем некоторую точку P . Если r будет обозначать расстояние от другой точки M области до точки P , то мы можем ввести в рассмотрение следующую функцию $\Psi(M)$ точки M :

$$\Psi(M) = \frac{e^{-ikr}}{r}. \quad (5.4)$$

Эта функция непрерывна, как и ее две первые производные, всюду за исключением точки P ; она всюду за исключением точки P удовлетворяет уравнению

$$\Delta\Psi \equiv \frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial\Psi}{\partial r} = -k^2\Psi, \quad (5.5)$$

что легко проверить дифференцированием. Окружим тогда точку P сферой Σ бесконечно малого радиуса ε . Так как обе функции u и Ψ непрерывны, так же как и их две первые производные во всей области, ограниченной S и Σ , то мы сможем применить формулу Грина (5.3), полагая в ней $U = u$ и $V = \Psi$. В силу (5.2) и (5.5) тройной интеграл, стоящий в левой части, будет равен нулю, и у нас останется

$$\iint_S \left(u \frac{\partial\Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma + \iint_\Sigma \left(u \frac{\partial\Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma = 0. \quad (5.6)$$

Легко оценить величину второго интеграла, когда радиус ε сферы Σ стремится к нулю. Прежде всего, так как $\frac{\partial u}{\partial n}$ конечно в точке P , то второй член интеграла стремится к нулю одновременно с ε ; что касается первого члена, то поскольку

$$\frac{\partial\Psi}{\partial n} = -\frac{\partial\Psi}{\partial r} = +\frac{1}{r^2} e^{-ikr} + \frac{ik}{r} e^{-ikr}, \quad (5.7)$$

он равен

$$u(P) \left(\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{ik}{\varepsilon} \right) e^{-ike} \cdot 4\pi\varepsilon^2$$

и стремится к $4\pi u(P)$, когда ε стремится к нулю. Итак, заставляя ε стремиться к нулю, получаем знаменитую формулу Кирхгофа:

$$4\pi u(P) = - \iint_S \left(u \frac{\partial\Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma. \quad (5.8)$$

Она даст нам значение функции U в точке P внутри области D , когда известны значения u и $\frac{\partial u}{\partial n}$ на поверхности S .

Приведем пример применения формулы Кирхгофа к проблеме оптической дифракции. Рассмотрим экран с отверстием. На

переднюю плоскость этого экрана падает монохроматическая волна, соответствующая функции u , которую мы будем считать известной. Волна, проходя через отверстие, диффрагирует. Задача заключается в вычислении функции u в любой точке P пространства, находящегося позади экрана. Ограничим область D , содержащую точку P , замкнутой поверхностью S , затягивающей отверстие экрана, включающей самый экран, предполагаемый бесконечным, и бесконечно удаленную поверхность, опирающуюся на экран и заключающую все пространства за экраном. К этой области D и этой поверхности S применим формулу (5.8), которая даст значение $u(P)$, если сделать следующие предположения: 1) функция u и ее производная $\frac{\partial u}{\partial n}$ на части поверхности S , совпадающей с отверстием, имеют значения, определяемые известной формой u для падающей волны; 2) функция u и производная $\frac{\partial u}{\partial n}$ предполагаются равными нулю на всей плоскости экрана и, разумеется, на всей бесконечно удаленной части поверхности S . Расчет, проведенный таким образом, как известно, дает результаты, весьма удовлетворительно совпадающие с опытом.

Несмотря на успех этого способа расчета, против него можно сделать серьезное возражение. Прежде всего, совершенно неизвестно, будут ли полученные для $u(P)$ значения стремиться к тем, которые мы допустим *a priori* существующими на отверстии, если устремить точку P к точке поверхности, затягивающей отверстие. Также не будет в общем совпадения между $\frac{\partial u}{\partial n}$, вычисленной указанным способом в точке отверстия, и значением, допущенным для $\frac{\partial u}{\partial n}$ в этой точке. Больше того, расчет ведет к нахождению ненулевых значений для u на задней стороне экрана, что вполне естественно, так как в силу диффракции нет причины, чтобы эта задняя сторона была совсем темной, ибо очевидно, что около краев отверстия функция u будет очень сильно отличаться от нуля. Для смягчения этой трудности было предложено рассматривать указанный выше способ расчета как первое приближение, а второе приближение получать путем пересчета u , пользуясь формулой (5.8), но принимая на этот раз

значения u и $\frac{\partial u}{\partial n}$ в отверстии и на задней стороне экрана, полученные в первом приближении. Можно было бы продолжать этот расчет последовательных приближений, но ничто не гарантирует, что эти приближения дают сходящийся ряд. Здесь и возникает затруднение, в решение которого до сих пор не внесена полная ясность. Все рассуждения, изложенные в данной главе, также не преодолевают этого затруднения. Тем не менее, не надо преувеличивать важности этой проблемы, так как на практике результаты, полученные обычным методом расчета, вполне достаточны.

Имеются два других серьезных возражения, касающихся обычного способа расчета диффракции. Одно из них касается непрерывности функции u на поверхности S . Допуская, что u имеет в отверстии значение, соответствующее падающей волне, а на задней стороне экрана значение нуль, приписывают u разрыв непрерывности вдоль всего контура отверстия, и эта разрывность мешает применению к функции u формулы Грина, что отнимает у формулы (5.8) ее логическое основание. Другое возражение, о котором мы упомянем, связано с электромагнитной природой излучения. Мы знаем, что уравнения Максвелла дают для распространения в пустоте полей \mathbf{E} и \mathbf{H} следующие уравнения:

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad \Delta \mathbf{H} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}. \quad (5.9)$$

Каждая из шести составляющих электромагнитного поля подчиняется уравнению (5.1), и, казалось бы, к ним можно применить рассуждения, изложенные в начале раздела, и таким образом получить формулу (5.8) для каждой составляющей, т. е., казалось бы, можно вычислить поля \mathbf{E} и \mathbf{H} в точке P по формуле (5.8).

Однако необходимо было бы проверить, подчиняются ли таким путем рассчитанные поля уравнениям Максвелла, которые налагают на поля более жесткие ограничения, поскольку связывают между собой отдельные составляющие полей определенными соотношениями. Нетрудно убедиться, что результаты расчета по формуле (5.8) не удовлетворяют уравнениям Максвелла.

Чтобы получить выражения для $\mathbf{E}(P)$ и $\mathbf{H}(P)$, удовлетворяющие уравнениям Максвелла, пришлось прибегнуть к иному методу, чем метод Кирхгофа, совместимому с существованием разрывности на экране. Вместо того чтобы считать волну в пространстве за экраном определенной граничными значениями u и $\frac{\partial u}{\partial n}$, рассмотрим ее как созданную воображаемыми источниками, размещенными на поверхности фронта падающей волны в отверстии. Этот метод рассмотрения значительно совершеннее предыдущего, так как он дает поля, удовлетворяющие уравнениям Максвелла, и учитывает разрыв непрерывности, появляющийся на контуре, замыкающем отверстие. Этим методом, очень близким по содержанию к идеям, выраженным впервые Гюйгеном в его знаменитом принципе, мы в состоянии сразу уничтожить трудности, связанные с разрывностью u на контуре отверстия и с требованием удовлетворить уравнениям Максвелла.

При исследовании диффракции электромагнитных волн у рупора эти вопросы недавно вновь были разобраны в работе Стрэттона и Чу, вернувшихся к формулам, предложенным ранее Котлером взамен формул (5.8) (см. [13] и [18]). В следующем разделе мы выведем эти формулы Котлера.

Заметим, что выше мы постоянно предполагали, что имеем дело с распространением волн в пустоте или по крайней мере в среде, где можно принять $\epsilon = \mu = 1$. Однако если бы дело обстояло иначе, то надо было бы в формулах (5.1) и (5.8) просто заменить k через $k\sqrt{\epsilon\mu}$. Будем продолжать рассуждения, предполагая $\epsilon = \mu = 1$, что является наиболее важным практическим случаем.

2. Вывод формул Котлера

Чтобы найти формулы, которые должны для электромагнитных полей заменить формулу (5.8), мы начнем с уравнений Максвелла, но напишем их, предполагая, что наряду с плотностями ρ и \mathbf{i} электрического заряда и тока существуют плотности δ и \mathbf{j} магнитного заряда и тока. При этих условиях будем иметь

уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \text{rot } \mathbf{H} - \frac{4\pi}{c} \mathbf{i}, & -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \text{rot } \mathbf{E} - \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}; \\ \text{div } \mathbf{E} &= 4\pi\rho, & \text{div } \mathbf{H} &= -4\pi\delta; \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{i} &= 0, & \frac{\partial \delta}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

Уравнения третьей строки — это уравнения сохранения, которые следуют из уравнений первых двух строк. Пусть теперь V и \mathbf{A} — потенциалы, а V' и \mathbf{A}' — антипотенциалы, такие, что

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } V + \text{rot } \mathbf{A}'; \quad \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} + \text{grad } V' + \text{rot } \mathbf{A} \quad (5.11)$$

и

$$\frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial t} + \text{div } \mathbf{A} = 0, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial V'}{\partial t} - \text{div } \mathbf{A}' = 0. \quad (5.12)$$

Подставляя (5.11) и (5.12) в (5.10), получим

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}'}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{A}' = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (5.13)$$

Для монохроматической волны частоты $kc/2\pi$ формулы (5.11) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= -ik\mathbf{A} + \frac{1}{ik} \text{grad div } \mathbf{A} + \text{rot } \mathbf{A}', \\ \mathbf{H} &= ik\mathbf{A}' - \frac{1}{ik} \text{grad div } \mathbf{A}' + \text{rot } \mathbf{A}. \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

Рассмотрим теперь поверхность S , ограниченную контуром C . Предположим, что в точке M , находящейся в пространстве в непосредственной близости к одной из сторон S , поля \mathbf{E} и \mathbf{H} будут равны нулю, тогда как у них будут определенные отличные от нуля значения в точке M' , находящейся против точки M в непосредственной близости к другой стороне поверхности. Проведем через M ось z нормально к поверхности и оси x и y — в касательной плоскости. Можно написать:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} &= \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}, & \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} &= \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}, \\ \text{div } \mathbf{E} &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Но производные по x и y — конечные, тогда как производные по z очень велики; интегрируя по нормали от M к M' , получим

$$\int_M^{M'} \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} dz = -|H_y|_{M'}, \quad \int_M^{M'} \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} dz = |H_x|_{M'},$$

$$\int_M^{M'} \operatorname{div} \mathbf{E} dz = |E_z|_{M'}. \quad (5.16)$$

Сравнивая эти формулы с общими уравнениями

$$\frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} = \operatorname{rot}_z \mathbf{H} - \frac{4\pi}{c} i_x, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} = \operatorname{rot}_y \mathbf{H} - \frac{4\pi}{c} i_y, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (5.17)$$

мы видим, что интегралы в (5.16) совпадают с теми, которые получились бы из (5.17), если считать, что \mathbf{H} непрерывно при переходе через S , а на поверхности имеются поверхностные плотности электрического тока и заряда, равные

$$\mathbf{i} = -\frac{c}{4\pi} [\mathbf{n} \times \mathbf{H}], \quad \rho = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}), \quad (5.18)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор нормали к S в направлении от M к M' , а поля \mathbf{E} и \mathbf{H} имеют значения, соответствующие точке M' .

Аналогично можно показать, что интегралы от $-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$ и от $\operatorname{div} \mathbf{H}$, взятые от M к M' вдоль нормали к S , совместимы с общими уравнениями, если считать, что \mathbf{E} непрерывно при переходе через S , а на поверхности имеются поверхностные плотности магнитного тока и заряда, равные

$$\mathbf{j} = -\frac{c}{4\pi} [\mathbf{n} \times \mathbf{E}], \quad \delta = -\frac{1}{4\pi} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}). \quad (5.19)$$

Поверхностным плотностям токов \mathbf{i} и \mathbf{j} соответствуют решения уравнений (5.13); эти решения выражаются посредством запаздывающих потенциалов:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \iint_S \mathbf{i} \Psi d\sigma, \quad \mathbf{A}' = \frac{1}{c} \iint_S \mathbf{j} \Psi d\sigma, \quad (5.20)$$

где Ψ имеет значение (5.4).

Для расчета полей с помощью этих потенциалов, придется применить к ним такие операторы, как grad , rot и т. п., дей-

ствующие на \mathbf{A} и \mathbf{A}' , рассматриваемые как функции координат точки P . Но в выражениях потенциалов эти координаты содержатся только в выражении расстояния r от точки P до точки M' , отнесенной к элементу $d\sigma$. Поэтому, если O_P — оператор, действующий на координаты P , а $O_{M'}$ — такой же оператор, действующий на координаты M' , то

$$O_P = -O_{M'}, \quad (5.21)$$

и окончательно можно написать по (5.14) и (5.20):

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = & -\frac{ik}{c} \iint_S \mathbf{i}\Psi d\sigma + \frac{1}{ikc} \iint_S \text{grad}_{\Psi} \text{div}_{\Psi} (\mathbf{i}\Psi) d\sigma - \\ & - \frac{1}{c} \iint_S \text{rot}_{\Psi} (\mathbf{j}\Psi) d\sigma, \end{aligned} \quad (5.22)$$

а также

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = & \frac{ik}{c} \iint_S \mathbf{j}\Psi d\sigma - \frac{1}{ikc} \iint_S \text{grad}_{\Psi} \text{div}_{\Psi} (\mathbf{j}\Psi) d\sigma - \\ & - \frac{1}{c} \iint_S \text{rot}_{\Psi} (\mathbf{i}\Psi) d\sigma, \end{aligned} \quad (5.23)$$

где индекс Ψ обозначает, что производные берутся по координатам точки M' и притом только в выражении функции Ψ .

Подставляя в (5.22) выражения (5.18) и (5.19) для \mathbf{i} и \mathbf{j} , получим

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(P) = & \frac{ik}{4\pi} \iint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \Psi d\sigma - \\ & - \frac{1}{4\pi ik} \iint_S \text{grad}_{\Psi} \text{div}_{\Psi} ([\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \Psi) d\sigma + \\ & + \frac{1}{4\pi} \iint_S \text{rot}_{\Psi} ([\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \Psi) d\sigma. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Легко проверить, что

$$\text{rot}_{\Psi} ([\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \Psi) = -[[\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \times \text{grad} \Psi] \quad (5.25)$$

и что

$$\begin{aligned}
 \iint_S \text{grad}_\Psi \text{div}_\Psi ([\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \Psi) d\sigma &= \\
 &= \oint_C \text{grad } \Psi (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{s}) + \iint_S (\mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{H}) \text{grad } \Psi d\sigma = \\
 &= \oint_C \text{grad } \Psi (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{s}) + ik \iint_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \text{grad } \Psi d\sigma. \quad (5.26)
 \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (5.24), получаем

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(P) &= \frac{1}{4\pi ik} \oint_C \text{grad } \Psi (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{s}) - \\
 &- \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ -ik [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \Psi + [[\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \times \text{grad } \Psi] + \right. \\
 &\quad \left. + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \text{grad } \Psi \right\} d\sigma. \quad (5.27)
 \end{aligned}$$

Аналогичное рассуждение дало бы:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}(P) &= -\frac{1}{4\pi ik} \oint_C \text{grad } \Psi (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}) - \\
 &- \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ ik [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \Psi + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \times \text{grad } \Psi + \right. \\
 &\quad \left. + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) \text{grad } \Psi \right\} d\sigma. \quad (5.28)
 \end{aligned}$$

Таковы формулы, полученные Котлером, для выражения поля в точке P , причем применимые даже и в тех случаях, когда на S имеется разрыв непрерывности полей.

Наконец, мы преобразуем уравнения (5.27) и (5.28) так, чтобы можно было их сопоставить с формулами Кирхгофа. Для упрощения расчета допустим, что поверхность S — плоская, что соответствует случаю отверстия в плоском экране. Плоскость S будет тогда плоскостью xy , и двойной интеграл (5.27) легко преобразовать, заменив $-ik\mathbf{H}$ через $\text{rot } \mathbf{E}$, например, для E_x находим

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ [\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{E}]_x \Psi + [[\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \times \text{grad } \Psi]_x + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right\} d\sigma = \\
 = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ \Psi \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) + E_x \frac{\partial \Psi}{\partial z} + E_z \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right\} dx dy, \quad (5.29)
 \end{aligned}$$

так как $n_x = n_y = 0$ и $n_z = 1$.

Отсюда легко увидеть, что

$$4\pi E_x(P) = \frac{1}{ik} \oint_C \frac{\partial \Psi}{\partial x} (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{s}) + \oint_C \Psi [\mathbf{E} \times d\mathbf{s}]_x + \\ + \iint_S \left(\Psi \frac{\partial E_x}{\partial n} - E_x \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) d\sigma, \quad (5.30)$$

аналогичные выражения имеем для E_y и E_z . Таким образом, для $4\pi \mathbf{E}(P)$ можно написать:

$$4\pi \mathbf{E}(P) = \frac{1}{ik} \oint_C \text{grad } \Psi (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{s}) + \oint_C \Psi [\mathbf{E} \times d\mathbf{s}] + \\ + \iint_S \left(\Psi \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial n} - \mathbf{E} \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) d\sigma. \quad (5.31)$$

Точно так же находим для магнитного поля:

$$4\pi \mathbf{H}(P) = -\frac{1}{ik} \oint_C \text{grad } \Psi (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}) + \oint_C \Psi [\mathbf{H} \times d\mathbf{s}] + \\ + \iint_S \left(\Psi \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial n} - \mathbf{H} \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) d\sigma. \quad (5.32)$$

Во всех предыдущих формулах \oint_C — криволинейный интеграл, взятый вдоль контура C в направлении движения часовой стрелки по отношению к наблюдателю, находящемуся со стороны прошедшей волны. Именно это условие определило знаки, принятые нами для этих интегралов.

Из формул (5.31) и (5.32) видно, что двойные интегралы Кирхгофа, взятые на поверхности отверстия, должны быть дополнены криволинейными интегралами, взятыми вдоль контура отверстия, если мы хотим учесть разрыв на этом контуре.

Так как мы получили формулы (5.31) и (5.32) несколько искусственным способом, то необходимо непосредственно проверить, что выражения, полученные для \mathbf{E} и \mathbf{H} , удовлетворяют уравнениям Максвелла. В этом мы убедимся, рассматривая выражения (5.27) и (5.28), эквивалентные (5.31) и (5.32). Проверим сначала

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -ik \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{E}. \quad (5.33)$$

Обозначим через rot_{Ψ} оператор ротора, действующий на функцию Ψ в точке, лежащей в отверстии. Исходя из (5.27), найдем

$$4\pi \text{rot}_P \mathbf{E} = \iint_S \left\{ ik [(\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \times \text{grad } \Psi] + \right. \\ \left. + \text{rot}_{\Psi} [(\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \text{grad } \Psi] \right\} d\sigma. \quad (5.34)$$

Вычислим ротор второго интеграла, принимая плоскость отверстия за плоскость $xу$; для составляющей x этого ротора найдем выражение

$$[\mathbf{n} \times \mathbf{E}]_x \Delta \Psi + E_y \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - E_x \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y},$$

откуда, интегрируя, получаем

$$\iint_S (\text{rot}_{\Psi} [(\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \text{grad } \Psi])_x d\sigma = \\ = \iint_S \left\{ [\mathbf{n} \times \mathbf{E}]_x \Delta \Psi - (\mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{E}) \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right\} d\sigma - \oint_C \frac{\partial \Psi}{\partial x} (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}). \quad (5.35)$$

Возвращаясь к векторной форме, видим, что можно написать (5.34) следующим образом:

$$4\pi \text{rot } \mathbf{E} = \iint_S \left\{ ik [(\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \times \text{grad } \Psi] + \right. \\ \left. + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \Delta \Psi - (\mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{E}) \text{grad } \Psi \right\} d\sigma + \oint_C \text{grad } \Psi (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}). \quad (5.36)$$

Теперь достаточно умножить выражение (5.28) для \mathbf{H} на $-ik$, чтобы убедиться, что уравнение (5.33) удовлетворяется. Совершенно аналогичным расчетом проверим, удовлетворяется ли уравнение

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = ik\mathbf{E} = \text{rot } \mathbf{H}. \quad (5.37)$$

Остается проверить уравнения дивергенции полей \mathbf{E} . Согласно (5.27) получим

$$4\pi \text{div}_P \mathbf{E} = -4\pi \text{div}_{\Psi} \mathbf{E} = -\frac{1}{ik} \oint_C \Delta \Psi (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{s}) - \\ - \iint_S \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \Delta \Psi - ik [(\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \cdot \text{grad } \Psi] \right\} d\sigma, \quad (5.38)$$

так как

$$\operatorname{div}_{\Psi} [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \Psi = ([\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \cdot \operatorname{grad} \Psi), \operatorname{div}_{\Psi} [[\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \times \operatorname{grad} \Psi] = 0. \quad (5.39)$$

Но мы имеем также

$$\iint_S ([\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \cdot \operatorname{grad} \Psi) d\sigma = \iint_S (\mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H}) \Psi d\sigma - \oint_C \Psi (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{s}). \quad (5.40)$$

Внесем это значение в (5.38) и примем в расчет (5.5) и (5.37); как легко заметить, второй член (5.38) равен нулю, так что уравнение $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ удовлетворено. Подтверждается также, исходя из (5.28), что $\operatorname{div} \mathbf{H}$ равна нулю. Наличие контурных интегралов в формулах Котлера существенно для выполнения этих соотношений.

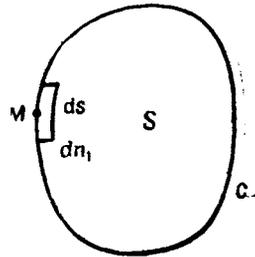
Подведем теперь в нескольких словах итог всего хода рассуждения, приведшего нас к формулам Котлера. На поверхности с отверстием мы приняли во внимание наличие разрывности полей \mathbf{E} и \mathbf{H} падающей волны, но в расчете скомпенсировали эту разрывность некоторым определенным распределением поверхностных плотностей магнитного и электрического токов по всему отверстию. Затем, согласно с сутью принципа Гюйгенса, мы стали считать, что эти поверхностные токи распределены по поверхности фронта волны в отверстии, причем они рассматриваются как источники, создающие поля за экраном; эта гипотеза дала нам немедленно возможность рассчитать излучение за экраном, причем результат выражается посредством запаздывающих потенциалов.

Очень интересно проанализировать также происхождение различных членов в формулах (5.27) и (5.28). Если сравнить выражение под знаком двойного интеграла в этих формулах с выражением плотности (5.18) и (5.19), то видно, что двойные интегралы представляют поля, созданные в точке P поверхностными зарядами и токами (5.18) и (5.19). Каково же происхождение простых интегралов, фигурирующих в (5.27) и (5.28)? Они обязаны своим происхождением наличию на контуре C фиктивного линейного заряда, обусловленного разрывом полей на этом контуре. Покажем это для формулы (5.27), помня, что аналогичное объяснение будет действительно и для (5.28). Обозначим через \mathbf{n}_1 единичный вектор внешней нормали к кон-

туру S в точке M этого контура в плоскости, касательной к поверхности S в M . В точке M мы можем разложить вектор \mathbf{i} на три прямоугольные составляющие: i_n , i_s и i_{n_1} . Рассмотрим элемент σ поверхности S , примыкающий к контуру C в точке M , как указано на фиг. 7.

Уравнение сохранения дает нам возможность написать

$$ikc \int_{\sigma} \rho ds dn_1 = - \int_{\sigma} \left(\frac{\partial i_s}{\partial s} + \frac{\partial i_n}{\partial n} + \frac{\partial i_{n_1}}{\partial n_1} \right) dn_1 ds. \quad (5.41)$$



Фиг. 7.

Если мы заставим dn_1 стремиться к нулю, то и два первых члена правой части будут стремиться к нулю, так как \mathbf{i} — непрерывная функция как по s , так и по n , но третий член остается конечным вследствие бесконечно быстрого изменения \mathbf{H} , а следовательно, и \mathbf{i} на контуре C в направлении нормали n_1 . Отсюда видно, что надо приписать элементу ds контура C линейный заряд ρ_s , равный

$$\rho_s = - \frac{1}{ikc} \int \frac{\partial i_{n_1}}{\partial n_1} dn_1 = \frac{1}{4\pi ik} (\mathbf{n}_1 \cdot [\mathbf{n} \times \mathbf{H}]) = - \frac{1}{4\pi ik} H_s, \quad (5.42)$$

так как $(\mathbf{n}_1 [\mathbf{n} \times \mathbf{H}]) = (\mathbf{H} [\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}]) = -H_s$, с учетом положительного направления обхода, выбранного на C .

Таким образом убеждаемся, что однократный интеграл (5.27) представляет поле, созданное фиктивным распределением электричества (5.42) на контуре C и отвечающее разрывности электромагнитного поля на этом контуре. Совершенно аналогична этому интерпретация простого интеграла (5.28). Надо отметить, что если бы мы в расчете \mathbf{E} и \mathbf{H} исходили не из формул (5.22) и (5.23), т. е. не из соотношений (5.14) с учетом выражений (5.18) и (5.19) для \mathbf{i} и \mathbf{j} , а из соотношений (5.11), рассчитывая скалярные потенциалы V и V' по значениям (5.18) и (5.19) для ρ и δ , то мы бы нашли выражения (5.28) и (5.29) без интегралов по контурам, так что найденные поля не были бы решениями уравнений Максвелла. Таким образом видим, что предыдущий расчет таит в себе ряд тонкостей, чем и объясняется тот факт, что авторы, пытавшиеся его осуществить, довольно долго блуждали, прежде чем дойти до точных выражений (5.28) и (5.29).

3. Диффракция волн на выходе волноводов и рупоров

Формулы Котлера в настоящее время используются в радиотехнике для расчета диффракции электромагнитных волн, на выходе волноводов и рупоров в целях вычисления направленности их излучения. Излучатель волн находится всегда где-то в волноводе или рупоре. При выходе из волновода или рупора всегда имеет место заметная диффракция, приводящая к уменьшению направленности излучения, которую очень важно уметь по возможности точно оценить. В дальнейшем мы примем, что волны, рассчитанные в волноводе или рупоре по условиям возбуждения, сохраняются до выхода, т. е. что поля имеют на поверхности выхода те же самые значения, как если бы волновод или рупор были неограниченными.

Конечно, это не выполняется точно. Далее, допустим, что диффракция на выходе может быть рассчитана так, как если бы этот выход был отверстием в плоском экране. Применим поэтому формулы (5.31) и (5.32). Напомним, что в этих формулах нормаль n к поверхности S обращена внутрь волновода или рупора и что интегралы \oint_C должны быть взяты по контуру выхода по направлению часовой стрелки для наблюдателя, рассматривающего этот выход снаружи. Расчеты, произведенные таким образом, дают хорошие результаты, и, следовательно, допущения, положенные в их основу, надо считать удовлетворительно согласующимися с действительностью.

Эти расчеты диффракции для волноводов прямоугольного сечения были выполнены Барроу и Грином [2], для секторных рупоров — Барроу и Чу [4] и для биконических рупоров — Барроу, Чу и Янсенем [5]. Ограничимся изложением расчетов для очень простого случая, а именно для волновода прямоугольного сечения, через который проходит волна H_0 .

4. Диффракция на выходе волновода прямоугольного сечения для волны H_0

Рассмотрим формулу (2.17) при $n_2 = 0$, причем будем теперь писать просто t вместо n_1 . Но так как мы отныне будем брать начало координат в центре выхода, как указано на фиг. 8, то

напишем выражения отличных от нуля составляющих электромагнитного поля в следующем виде

$$\left. \begin{aligned} E_y &= -C \frac{\cos \frac{m\pi}{a} x}{\sin \frac{m\pi}{a} x} e^{i(kct - k_z z)}, & H_x &= -\frac{k_z}{k} E_y, \\ H_z &= -\frac{iC}{k} \frac{m\pi}{a} \frac{\sin \frac{m\pi}{a} x}{\cos \frac{m\pi}{a} x} e^{i(kct - k_z z)}, \end{aligned} \right\} \quad (5.43)$$

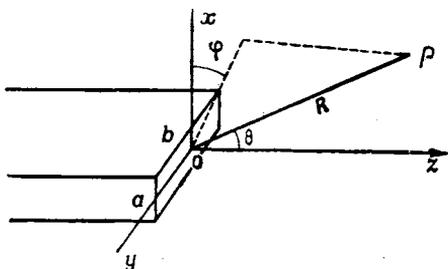
причем

$$\alpha^2 = k^2 - k_z^2 = \frac{m^2 \pi^2}{a^2}. \quad (5.44)$$

В формулах (5.43) C — произвольная комплексная постоянная, и в выражении E_y надо брать косинус или синус, смотря по тому, является ли целое число m нечетным или четным, чтобы E_y удовлетворяло граничным условиям.

Мы будем определять положение внешней точки P значением радиуса вектора $R = \overline{OP}$ и полярными углами θ и φ .

Введем также сокращенные обозначения:



Фиг. 8.

$$A = \frac{ka}{2} \sin \theta, \quad B = \frac{kb}{2} \sin \theta, \quad M = \frac{k_z}{k} = \sqrt{1 - \frac{m^2 \pi^2}{a^2 k^2}} \quad (5.45)$$

и проведем расчет электрического поля \mathbf{E} в точке P при помощи формулы (5.31); расчет магнитного поля $\mathbf{H}(P)$ мог бы быть сделан совершенно аналогичным способом при помощи формулы (5.32). Предположим, что точка P очень удалена от выхода, т. е. что расстояние R очень велико по сравнению с длинами a , b и λ . Так как координаты точки P суть

$$x_P = R \sin \theta \cos \varphi, \quad y_P = R \sin \theta \sin \varphi, \quad z_P = R \cos \theta, \quad (5.46)$$

то расстояние r от точки P до точки M с координатами x , y в плоскости выхода имеет приближенное значение:

$$r \equiv \sqrt{z_P^2 + (x_P - x)^2 + (y_P - y)^2} \approx R - \sin \theta (x \cos \varphi + y \sin \varphi) \quad (5.47)$$

и, таким образом, приближенно имеем на всем выходе

$$\cos(\widehat{n, r}) \approx \cos \theta. \quad (5.48)$$

Теперь можно рассчитать двойной интеграл (интеграл Кирхгофа) формулы (5.31). Составляющие по x и z равны нулю по (5.43), в то время как составляющие по y записываются в форме (пренебрегая членами, содержащими R^{-1})

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4\pi} \iint_P \left(E_y \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial E_y}{\partial n} \right) d\sigma \approx \\ & \approx -\frac{iCk}{4\pi R} e^{ik(ct-R)} (\cos \theta + M) \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \frac{\cos \frac{m\pi}{a} x}{\sin \frac{m\pi}{a} x} e^{ik \sin \theta (x \cos \varphi + y \sin \varphi)}. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Двойной интеграл в правой части (5.49) равен:

$$\begin{aligned} & \frac{b \sin(B \sin \varphi)}{B \sin \varphi} \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{a \sin \left(A \cos \varphi + \frac{m\pi}{2} \right)}{A \cos \varphi + m\pi} + \right. \\ & \left. + (-1)^{m+1} \frac{a \sin \left(A \cos \varphi - \frac{m\pi}{2} \right)}{A \cos \varphi - m\pi} \right] \end{aligned}$$

или, упрощая,

$$(-\pi ab) \frac{\sin(B \sin \varphi)}{B \sin \varphi} \cdot \frac{\sin \left(A \cos \varphi + \frac{m\pi}{2} \right)}{A^2 \cos^2 \varphi - m^2 \pi^2}.$$

Отсюда заключаем, что двойной интеграл Кирхгофа дает электрическое поле $\mathbf{E}^{(1)}$ со следующими составляющими по прямоугольным осям координат:

$$E_x^{(1)} = E_z^{(1)} = 0, \quad (5.50)$$

$$E_y^{(1)} = \frac{imCabk}{4R} (\cos \theta + M) \frac{\sin(B \sin \varphi)}{B \sin \varphi} \frac{\sin \left(A \cos \varphi + \frac{m\pi}{2} \right)}{A^2 \cos^2 \varphi - m^2 \pi^2} e^{ik(ct-R)}.$$

Перейдем теперь к расчету первого контурного интеграла в формуле (5.31). Этот интеграл дает нам для поля $\mathbf{E}^{(2)}$ только радиальную составляющую, имеющую вид (в том же приближении)

$$\begin{aligned} E_r^{(2)} &= -\frac{1}{4\pi R} \oint_C e^{-ikr} H_x dx = \\ &= \frac{Ck_z}{4\pi kR} e^{ik(ct-R)} \oint_C \frac{\cos \frac{m\pi}{a} x}{\sin \frac{m\pi}{a} x} e^{ik \sin \theta (x \cos \varphi + y \sin \varphi)} dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{iCk_s}{4\pi kR} 2 \sin(B \sin \varphi) \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \frac{\cos m\pi}{\sin \frac{m\pi}{a}} x e^{ik \sin \theta} x \cos \varphi dx e^{ik(ct-R)} = \\
 &= \frac{iCk_s}{2\pi kR} \sin(B \sin \varphi) \frac{\sin\left(A \cos \varphi + \frac{m\pi}{2}\right)}{(A \cos \varphi)^2 - m^2\pi^2} (-m\pi a) e^{ik(ct-R)}, \quad (5.51)
 \end{aligned}$$

откуда

$$E_\varphi^{(2)} = E_\theta^{(2)} = 0, \quad (5.52)$$

$$E_r^{(2)} = -\frac{imCabk}{4R} \frac{\sin(B \sin \varphi)}{B \sin \varphi} \frac{\sin\left(A \cos \varphi + \frac{m\pi}{2}\right)}{A^2 \cos^2 \varphi - m^2\pi^2} M \sin \theta \sin \varphi e^{ik(ct-R)}.$$

Наконец, остается вычислить поле $\mathbf{E}^{(3)}$, соответствующее второму контурному интегралу формулы (5.31). У этого поля в прямоугольной системе координат отлична от нуля только составляющая по z , имеющая значение

$$\begin{aligned}
 E_z^{(3)} &= -\frac{C}{4\pi R} e^{ik(ct-R)} \oint_C \frac{\cos m\pi}{\sin \frac{m\pi}{a}} x e^{ik \sin \theta} (x \cos \varphi + y \sin \varphi) dx = \\
 &= \frac{iC}{4\pi R} 2 \sin(B \sin \varphi) \frac{\sin\left(A \cos \varphi - \frac{m\pi}{2}\right)}{A^2 \cos^2 \varphi - m^2\pi^2} (-m\pi a) e^{ik(ct-R)}, \quad (5.53)
 \end{aligned}$$

откуда

$$E_x^{(3)} = E_y^{(3)} = 0, \quad (5.54)$$

$$E_z^{(3)} = -\frac{imCa bk}{4R} \frac{\sin(B \sin \varphi)}{B \sin \varphi} \frac{\sin\left(A \cos \varphi + \frac{m\pi}{2}\right)}{A^2 \cos^2 \varphi - m^2\pi^2} \sin \theta \sin \varphi e^{ik(ct-R)}.$$

Используя полученные выражения (5.50), (5.52) и (5.54), мы можем вычислить результирующее поле \mathbf{E} в точке P , т. е. составляющие E_r , E_φ и E_θ этого поля. Исходим из формул

$$\left. \begin{aligned}
 E_r^{(i)} &= E_x^{(i)} \cos \varphi \sin \theta + E_y^{(i)} \sin \varphi \sin \theta + E_z^{(i)} \cos \theta, \\
 E_\varphi^{(i)} &= E_y^{(i)} \cos \varphi - E_x^{(i)} \sin \varphi, \\
 E_\theta^{(i)} &= E_x^{(i)} \cos \varphi \cos \theta + E_y^{(i)} \cos \theta \sin \varphi - E_z^{(i)} \sin \theta,
 \end{aligned} \right\} \quad (5.55)$$

действительных для $i=1, 2, 3$. Прежде всего убеждаемся, что

$$E_r = E_y^{(1)} \sin \varphi \sin \theta + E_r^{(2)} + E_z^{(3)} \cos \theta = 0, \quad (5.56)$$

что устанавливает поперечный характер дифрагировавшей волны. Этот результат и надо было ожидать, так как формулы Котлера

удовлетворяют соотношению $\operatorname{div} E = 0$. Мы видим, что последнее соотношение не было бы удовлетворено и что волны не были бы поперечными, если бы мы пренебрегали контурным интегралом.

С помощью формул (5.55) находим

$$\left. \begin{aligned} E_{\varphi} &= E_y^{(1)} \cos \varphi = \frac{im Cabk}{4R} \cos(\theta + M) \frac{\sin(B \sin \varphi)}{B \sin \varphi} \times \\ &\times \frac{\sin\left(A \cos \varphi + \frac{m\pi}{2}\right)}{A^2 \cos^2 \varphi - m^2 \pi^2} \cos \varphi e^{ik(ct-R)}, \\ E_{\theta} &= E_y^{(1)} \cos \theta \sin \varphi - E_z^{(3)} \sin \theta = \\ &= \frac{im Cabk}{4R} (1 + M \cos \theta) \frac{\sin(B \sin \varphi)}{B \sin \varphi} \times \\ &\times \frac{\sin\left(A \cos \varphi + \frac{m\pi}{2}\right)}{A^2 \cos^2 \varphi - m^2 \pi^2} \sin \varphi e^{ik(ct-R)}. \end{aligned} \right\} \quad (5.57)$$

Подобным образом можно было бы найти

$$H_r = 0, \quad H_{\theta} = -E_{\varphi}, \quad H_{\varphi} = E_{\theta}. \quad (5.58)$$

В частности, в плоскости симметрии xz , где $\varphi = 0$, получается

$$E_{\theta} = H_{\varphi} = 0, \quad E_{\varphi} = -H_{\theta} = E_y^{(1)} \quad (5.59)$$

и в плоскости симметрии yz , где $\varphi = \frac{\pi}{2}$,

$$E_{\varphi} = H_{\theta} = 0, \quad E_{\theta} = H_{\varphi} = E_y^{(1)} \cos \theta - E_z^{(3)} \sin \theta. \quad (5.60)$$

На оси z контурные интегралы формул (5.31) и (5.32) не дают никаких добавок, что можно предвидеть из соображений симметрии¹.

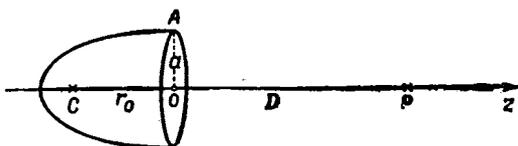
5. Вывод одной формулы Дарбора

Несколько лет назад Дарбор исследовал с учетом диффракции излучение, отраженное зеркалом, имеющим форму парабо-

¹ Диффракция волн на открытом конце плоского волновода (две параллельные полубесконечные плоскости) была строго решена Л. А. Вайнштейном [37] [33]. В этих же работах им также разобран вопрос о пределах применимости и метода Кирхгофа. Развитый здесь метод автором применен к случаю диффракции на открытом конце круглого волновода (работа готовится к печати в ЖТФ). (Прим. ред.)

лоида вращения [11]. Это исследование, которое стоило бы выполнить более точным способом, привело его к интересной формуле; мы ее выведем, но только для более общего случая.

Рассмотрим ограниченный рупор с осевой симметрией (относительно оси Oz). Раструб этого рупора будет, следовательно, кругом радиуса a , перпендикулярным к оси Oz . Вычислим электрическое поле, излученное этим рупором, в точке P оси, находящейся на расстоянии D , очень большом в сравнении с размерами рупора (фиг. 9).



Фиг. 9.

Примем центр раструба за начало координат и предположим, что в точке C оси рупора помещен гармонический излучатель с частотой, равной $kc/2\pi$.

Для облегчения расчета примем три следующих допущения:

1) Отношение $\frac{a}{D}$ очень мало по сравнению с единицей, так же как и отношение $\frac{\lambda}{D}$,

2) Отношение $\frac{a}{\lambda}$ (где λ — длина волны в пустоте, соответствующая частоте $kc/2\pi$) таково, что $\frac{a}{\lambda} \frac{a}{D}$ очень мало по сравнению с единицей;

3) Отношение $\frac{a}{\lambda}$ достаточно велико для того, чтобы электрическое поле, посланное точкой M , лежащей в плоскости раструба, могло быть изображено поблизости от этой точки выражением

$$\mathbf{E}(M) = \mathbf{E}_0(M) e^{ik(ct-z)}, \quad (5.61)$$

причем \mathbf{E}_0 является функцией рассмотренной точки M раструба, но не зависит от z .

Эти допущения совместимы и обычно реализуются на практике. Например, если мы имеем

$$a = 1,5 \text{ м}, \quad D = 1 \text{ км}, \quad \lambda = 10 \text{ см},$$

то эти допущения осуществляются, потому что тогда

$$\frac{a}{D} = \frac{1,5}{1000}, \quad \frac{a}{\lambda} = 15, \quad \frac{a}{\lambda} \frac{a}{D} = \frac{2,25}{100}.$$

При этих условиях в плоскости раструба мы, в силу первого и третьего допущений, будем иметь

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} \approx \frac{\partial \Psi}{\partial r} \approx -ik \frac{e^{-ikr}}{r}, \quad \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial n} \approx -\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} = ik \mathbf{E}_0 e^{ikct}. \quad (5.62)$$

В формуле Котлера для поля \mathbf{E} в точке P в большинстве случаев контурные интегралы по причине симметрии не дадут никакого добавка. Например, излучатель — диполь, помещенный в точке C вдоль оси или перпендикулярно к оси. В этом случае можно написать

$$\mathbf{E}(P) = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\mathbf{E} \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial n} \right) d\sigma, \quad (5.63)$$

и по (5.62)

$$\mathbf{E}(P) \approx \frac{ik}{2\pi} e^{ikct} \iint_S \frac{e^{-ikr}}{r} \mathbf{E}_0 d\sigma. \quad (5.64)$$

По первому допущению $\frac{1}{r}$ можно заменить через $\frac{1}{D}$. С другой стороны, на поверхности раструба переменная r меняется от значения D в точке O до значения $\sqrt{D^2 + a^2} \approx D + \frac{a^2}{2D}$ на окружности; в силу второго допущения можно заменить на всем раструбе значения экспоненты e^{-ikr} ее значением в центре: e^{-ikD} . Если мы тогда обозначим через $\bar{\mathbf{E}}_0$ среднее значение \mathbf{E}_0 на раструбе, т. е.

$$\bar{\mathbf{E}}_0 = \frac{1}{S} \iint_S \mathbf{E}_0 d\sigma,$$

то формула (5.64) примет вид

$$\mathbf{E}(P) \approx \frac{ik}{2\pi D} \mathbf{E}_0 S e^{ik(ct-D)} = \frac{ika^2}{2D} \bar{\mathbf{E}}_0 e^{ik(ct-D)}, \quad (5.65)$$

так как $S = \pi a^2$.

Формула (5.65) совпадает с формулой Дарбора для параболоида. Она показывает, что для данного рупора и данной формы волны на раструбе электрическое поле в P будет пропорционально k , т. е. обратно пропорционально длине волны λ .

Теперь предположим, что мы удалили рупор, не изменяя излучателя. Вследствие этого в точку P будет доходить электрическое поле $\mathbf{E}_d(P)$, разумеется, отличное от $\mathbf{E}(P)$.

Так как излученные поля уменьшаются обратно пропорционально расстоянию, мы получим поле $\mathbf{E}_d(P)$ правильным, по крайней мере по порядку величины (особенно в случае, рассмотренном Дарбором, с диполем, перпендикулярным к оси), если примем

$$\mathbf{E}_d(P) \approx \bar{\mathbf{E}}_0 \frac{r_0}{D} e^{ik(ct-D)}, \quad (5.66)$$

где r_0 — расстояние излучателя от центра раструба. Подставляя в (5.65), получим

$$\mathbf{E}(P) \approx \frac{ika}{2} \frac{a}{r_0} \mathbf{E}_d(P) \quad (5.67)$$

или, обозначая

$$\frac{a}{r_0} = \alpha, \quad (5.68)$$

окончательно найдем:

$$|\mathbf{E}(P)| \approx \frac{k\alpha a}{2} |\mathbf{E}_d(P)| = \frac{\pi\lambda\alpha}{\lambda} |\mathbf{E}_d(P)|, \quad (5.69)$$

где произведение $\pi\alpha$ — число порядка единицы.

Формула (5.69) показывает, что отношение излученных полей с рупором и без него пропорционально отношению радиуса раструба к длине волны: для данного рупора оно изменяется в отношении, обратном длине волны.

В этом и заключается один из существенных результатов, полученных Дарбором. Мы провели доказательство более общим способом, чем Дарбор, и убедились, что его доказательство основано на ряде допущений.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Barrow, Распространение электромагнитных волн в металлических трубах, Proc. Inst. Radio Eng., **24**, 1298 (1936).
2. Barrow and Green, Электромагнитное излучение с конца металлической трубы прямоугольного сечения, Proc. Inst. Radio Eng., **26** 1520 (1938).
3. Barrow and Lewis, Секториальный электромагнитный рупор, Proc. Inst. Radio Eng., **27**, 41 (1939).
4. Barrow and Chu, Теория электромагнитных рупоров, Proc. Inst. Radio Eng., **27**, 5 (1939).
5. Barrow, Chu and Janzen, Биконический электромагнитный рупор, Proc. Inst. Radio Eng., **27**, 7(9) (1939).
6. Bognis, Собственные электромагнитные колебания ограниченной области диэлектрика, Ann. d. Physik, **35**, 276 (1939).
7. Brillouin, Распространение электромагнитных волн в трубе, Rev. gen. de l'electr., **24**, 1298 (1936).
8. Brillouin, Распространение волн в диэлектрическом кабеле, Bul. Soc. Fr. Electr., **8**, 898 (1938).
9. Carson, Mead and Schelkunoff, Волноводы для ультракоротких волн, Bell syst. Tech. Journ., **15**, 310 (1936).
10. Clavier, Теория цилиндрического волновода и сравнение с теорией коаксиальной линии, Bul. Soc. Fr. Electr., **8**, 355 (1938).
11. Darbord, Зеркала и линии связи для ультракоротких волн, L'Onde elec., **11**, 53 (1932).
12. Leigh Page and Adams, Электромагнитные волны в проводящих трубах, Phys. Rev., **52**, 647 (1937).
13. Kottler, Электромагнитная теория диффракции на черном экране, Ann. d. Physik, **71**, 456 (1923).
14. Southworth, Исследование волноводов, Journ. Appl. Phys., **25** 807 (1937).
15. Southworth, Новые экспериментальные методы исследования ультракоротких волн, Journ. Appl. Phys., **8**, 6(0) (1937).
16. Southworth and King, Металлические рупоры, используемые в качестве направленных приемников ультракоротких волн, Proc. Inst. Radio Eng., **27**, 95 (1939).
17. Schelkunoff, Теория распространения плоских электромагнитных волн, Proc. Inst. Radio Eng., **25**, 1457 (1937).
18. Stratton and Chu, Теория диффракции электромагнитных волн, Phys. Rev., **56**, 99 (1939).
- 19*. Краснушкин П., Акустические и электромагнитные волноводы сложной формы, Journ. of Phys. USSR, **10**, № 5, 434 (1946).
- 20*. Краснушкин П., О волнах в изогнутых трубах, Ученые записки МГУ, физика, вып. 75, кн. 2, ч. II, 9, 1945.

- 21*. Левин М., К теории тороидальных эндовибраторов, ЖТФ, 16, 833 (1946).
- 22*. Riess, Электрoмагнитные волны в согнутой трубе прямоугольного поперечного сечения, Quarter by Journ. of Appl. Math. (Brown Univ.) I, 328 (1943—1944).
- 23*. Jouget, О распространении волн в согнутом волноводе круглого поперечного сечения, C. R. Acad. Sci. Paris, 224, № 8, 549 (1947).
- 24*. Самарский А. А. и Тихонов А. Н., О возбуждении радиоволноводов I, ЖТФ, 17, 1283 (1947).
- 25*. Самарский А. А. и Тихонов А. Н., О возбуждении радиоволноводов II, ЖТФ, 17, 1431 (1947).
- 26*. Фельд Я. Н., Об одном методе расчета возбуждения волноводов, экзо- и эндовибраторов, ЖТФ, 17, 1471 (1947).
- 27*. Кисунько Г., К теории возбуждения радиоволноводов, ЖТФ, 16, 565 (1946).
- 28*. Мандельштам Л., Некоторые вопросы, связанные с возбуждением и распространением электромагнитных волн в трубах, ЖТФ, 15, 461 (1945).
- 29*. Драбкин А., Сравнение распространения электромагнитных волн в свободном пространстве и по радиогиду, ЖТФ, 12, 610 (1942).
- 30*. Каценеленбаум Б., О распространении электромагнитных волн вдоль бесконечных диэлектрических цилиндров при низких частотах, ДАН СССР, 18, 1317 (1947).
- 31*. Альперт Я., К вопросу о распространении электромагнитных волн в трубах, ЖТФ, 10, 1358 (1940).
- 32*. Рытов С., К расчету поглощения электромагнитных волн в трубах, ЖЭТФ, 10, 176 (1940).
- 34*. Вайнштейн Л., Об отражении звуковой волны в трубе от открытого конца, ДАН СССР, 18, 1957 (1947).
- 35*. Фельд Я., Граничная задача электродинамики и интегральные уравнения некоторых задач о диффракции, ЖЭТФ, 14, 1957 (1944).
- 36*. Введенский Б. и Аренберг А., О типах волн в секториальном радиорупоре, Труды Военной электротехнической академии связи им. Буденного, № 11, 1945.
- 37*. Вайнштейн Л., Строгое решение задачи о плоском волноводе с открытым концом, Изв. АН СССР, Сер. физ., 12, № 2 (1948).
- 38*. Rippner, Электромагнитные поля в параболическом зеркале, Journ. Math. Phys., 26, апрель, № 1, 42—45 (1947).
- 39*. Null, Диффракционные кривые микроволновых параболических антенн, Americ. Journ. of Phys., 15, № 2 (1947).
- 40*. Schelkunoff, Electromagnetic Waves, New-York, 1943, стр. 423.
- 41*. Вольман И. И., Диссертация, МИИС, Москва, 1945.
- 42*. Condon. Вынужденные колебания в полых резонаторах, Journ. Appl. Phys., февраль, 1941.
- 43*. Вайнштейн Л. К теории диффракции на двух параллельных полуплоскостях. Изв. АН СССР, Сер. физ., 12, № 2 (1948).

* Работы, отмеченные звездочкой, добавлены редактором русского перевода.

ОГЛАВЛЕНИЕ

От редактора	5
Глава I. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ УРАВНЕНИЯХ МАКСВЕЛЛА	7
1. Уравнения Максвелла в прямоугольных декартовых координатах	7
2. Комплексное изображение электромагнитных величин	11
3. Уравнения Максвелла в ортогональных криволинейных координатах	13
4. Потенциалы и векторы Герца	15
5. Функции U Борнуса	18
Глава II. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДАХ	21
1. Электрические волноводы	21
2. Изучение волноводов прямоугольного сечения	23
3. Волноводы круглого сечения	27
4. Коаксиальная линия	34
5. Волноводы эллиптического сечения и вопрос об устойчивости волн в волноводах	38
6. Фазовая и групповая скорости и средняя скорость распространения энергии в волноводах	42
7. Возбуждение волноводов	45
Глава III. НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ	51
1. Собственные колебания	51
2. Собственные колебания прямоугольного параллелепипеда	52
3. Собственные колебания прямого круглого цилиндра	53
4. Собственные колебания тора прямоугольного сечения	55
5. Собственные колебания тора круглого сечения	56
6. Собственные колебания шара	58
Глава IV. РАСЧЕТ ПОТЕРЬ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДАХ	64
1. Первый приближенный метод расчета потерь	64
2. Проникновение электромагнитных волн в проводники	65
3. Расчет затухания волны (E_0) в цилиндрическом волноводе	68
4. Расчет затухания для волны (H_0) в цилиндрическом волноводе	70
5. Расчет затухания для волны (H_1) в цилиндрическом волноводе	71
6. Второй метод расчета затухания	73

7. Расчет затухания волны (E_0) в цилиндрическом волноводе вторым методом	75
8. Расчет затухания волны (H_0) в цилиндрическом волноводе вторым методом	76
9. Новые результаты для волн с индексами выше нуля	77
10. Теория диэлектрического волновода	79
Глава V. принцип ГЮЙГЕНСА и ДИФФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ВЫХОДЕ ВОЛНОВОДОВ И РУПОРОВ	83
1. Применение формулы Кирхгофа к электромагнитным волнам	83
2. Вывод формул Котлера	87
3. Диффракция волн на выходе волноводов и рупоров	96
4. Диффракция на выходе волновода прямоугольного сечения для волны H_0	96
5. Вывод одной формулы Дарбора	100
Библиография	104

Редактор К. Гуров

Технический редактор А. Дрогов

Корректор М. Шулименко

*

Сдано в производство 1/IV 1948 г.

Подписано к печати 15/VII 1948 г.

А-06657 Печ. л. 6³/₄. Уч.-взд. л. 6,1.

Формат 60×92¹/₁₆. Издат. № 2/324.

Цена 8 р. 20 к. Заказ № 268.

16-я тип. треста «Полиграфкнига» ОГИЗа
при Совете Министров СССР.
Москва, Трехпрудный пер., дом 9.

